创新型普通高等教育“十三五”规划教材

概率论与数理统计

主编 阳平华 吴丽镐

概率论与数理统计
考试系统
http://39.106.32.175
考试系统激活码

航空工业出版社

创新型普通高等教育“十三五”规划教材

概率论与数理统计

主编　阳平华　吴丽镐

航空工业出版社

北京

内 容 提 要

本书共分为 7 章，包括概率的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验.

本书可供普通高等院校各类专业使用，也可作为广大自学者的参考书.

图书在版编目（C I P）数据

概率论与数理统计 / 阳平华，吴丽镐主编. -- 北京：航空工业出版社，2018.7（2020.1 重印）
ISBN 978-7-5165-1661-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①阳… ②吴… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 167713 号

概率论与数理统计
Gailvlun yu Shuli Tongji

航空工业出版社出版发行
（北京市朝阳区北苑 2 号院　100012）
发行部电话：010-59773006　　010-85672462

北京京华铭诚工贸有限公司印刷　　全国各地新华书店经售
2018 年 7 月第 1 版　　2020 年 1 月第 3 次印刷
开本：787×1092　1/16　　印张：13.25　　字数：306 千字
印数：5301—8000　　定价：43.80 元

前　言

概率论与数理统计是一门研究随机现象内在规律及其应用的课程，它在自然科学、社会科学、工程技术和工农业生产等领域有着广泛的应用．近年来，高等教育不断改革，高校逐渐向应用型转变，教材改革迫在眉睫．为此，我们精心编写了本书．

本书主要具有以下特点．

1．**精选例题，突出应用**．本书在介绍定义、定理时，精选了大量与实际生产相关的例题，不仅可以帮助学生理解相关理论知识，还能培养和提高学生的实际应用能力．例如，通过“检验维生素的平均含铁量是否合格”这一例题，使学生掌握大样本单个正态总体均值的检验．

2．**引例先行，重点突出**．本书在介绍较难理解的概念或定理时会先给出一些简单的实例，辅助学生理解．例如，第 4 章在介绍数学期望之前，先讨论了“求生产套装的平均价格”的问题．同时，本书对定义、定理等均作了加粗处理，便于学生在学习过程中抓住重点．

3．**个性贴士，一点就通**．本书插入了大量“注意”“提示”等小体例，有助于学生及时梳理知识点，解决疑难点．

4．**精选习题，随学随练**．本书在每一章的最后都设置了习题，题型丰富，难度适中，能够帮助学生巩固所学知识，强化对知识的理解与掌握．同时，书中还配有习题答案，便于学生自主学习和检验学习效果．

本书由阳平华、吴丽镐担任主编，李海荣、李菁、张清平担任副主编，阳彩霞、黄婷、黄业文参与编写．本书编写人员分工如下：阳平华编写第 1 章和第 2 章；吴丽镐编写第 3 章和第 4 章；李海荣编写第 5 章和第 7 章；张清平编写第 6 章；李菁、阳彩霞、黄婷、黄业文参与了相关资料的收集、整理工作．

本书在编写过程中借鉴了大量的相关资料和教材，在此，特向这些资料和教材的作者表示衷心的感谢．由于编者经验和水平有限，若本书存在疏漏或不妥之处，恳请各位读者批评指正，以便我们进行修订和完善．

使用本教材时，必须首先登录考试系统（网址：http://39.106.32.175），然后按提示或帮助文件说明输入封面防伪标上的考试系统激活码（刮开涂层获取激活码）进行练习或考试．此激活码为一书一码，只供一人使用，请注意保存．

另外，本书配有丰富的教学资源包，读者可登网站（www.bjjqe.com）下载．

本书编委会

主　编：阳平华　吴丽镐

副主编：李海荣　李　菁　张清平

参　编：阳彩霞　黄　婷　黄业文

目　录

第 1 章　概率的基本概念

概率论是研究随机现象统计规律性的数学学科，它的理论与方法在自然科学、社会科学、工程技术、经济管理等诸多领域有着广泛的应用. 从 17 世纪人们利用古典概型来研究人口统计、产品检查等问题到 20 世纪 30 年代概率论公理化体系的建立，概率论形成了自己严格的概念体系和严密的逻辑结构.

本章重点介绍概率论的两个最基本的概念：随机事件与概率.

1.1　随机事件

1.1.1　随机事件与样本空间

1. 随机现象

为了说明什么是随机现象，先看下面几个例子：

例 1　在标准大气压下，纯水加热到 100℃必然会沸腾.

例 2　生铁在室温下一定不能熔化.

例 3　往桌子上掷一枚质地均匀的硬币，则可能正面向上，也可能反面向上.

例 4　从含有 10 个次品的一批产品中任意抽取 5 件，则次品的个数可能是 0，1，2，3，4，5.

例 5　掷一颗骰子，则可能出现 1 点、2 点、3 点、4 点、5 点、6 点.

上述例子中的现象可以分为两类：

（1）在一定条件下，事先可以确定必然会出现某种结果（如例 1，例 2），这种现象称为**确定性现象**.

（2）在一定条件下，事先不能确定会出现哪种结果（如例 3，例 4，例 5），这种现象称为**随机现象**.

对于随机现象，人们事先无法确定将出现哪种结果. 从表面上看，随机现象的结果似乎是不可捉摸的，纯粹是偶然性在起支配作用，其实不然. 实践证明，随机现象在相同条件下重复进行多次观察，其结果会出现某种规律性. 例如，有人对“掷一枚质地均匀的硬币”的随机现象进行观察发现，在 12 000 次的重复观察中，正面向上有 6 019 次，约占

50.16%；在 24 000 次的重复观察中，正面向上有 12 012 次，约占 50.05%．这些数据告诉我们，对“掷一枚质地均匀的硬币，观察正面向上”这一随机现象，经过多次重复观察，结果呈现出一种内在的规律：“正面向上”和“反面向上”几乎各占一半，而且试验次数越多，就越接近“各占一半”这一事实．这种通过多次重复观察所呈现的规律，称为**统计规律**．

2. 随机试验

为了探讨随机现象的统计规律，就要对随机现象进行观察和研究．我们把对随机现象的一次观察称为一次**随机试验**，简称**试验**．

随机试验具有下列特点：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验可以有各种不同的结果，且结果在试验前都是明确的；

（3）每次试验恰好出现这些可能结果中的一个，但在试验前不能确定哪一个结果会出现．

3. 随机事件

随机试验的每一种可能的结果称为**随机事件**，简称**事件**，通常用字母 A，B，C 等来表示．

例 3 中，记 $A=\{$正面向上$\}$，$B=\{$正面向下$\}$，则 A，B 都是随机事件．例 4 中，记 $A_0=\{$全是正品$\}$，$A_1=\{$有 1 件次品$\}$，$A_2=\{$有 2 件次品$\}$，…，$A_5=\{$有 5 件次品$\}$，则 A_0，A_1，A_2，…，A_5 都是随机事件；又记 $B=\{$次品不多于 2 件$\}$，$C=\{$次品数是奇数$\}$，则 B，C 也都是随机事件．

在每次试验中，一定会发生的事件称为**必然事件**，记作 Ω；一定不会发生的事件称为**不可能事件**，记作 $\varnothing$．如例 5 中，事件$\{$点数不大于 6$\}$为必然事件，事件$\{$点数大于 6$\}$为不可能事件．

注 意

> 严格地说，必然事件和不可能事件都不是随机事件，但为了研究上的方便，我们把它们看作是随机事件的特例．

4. 基本事件与样本空间

我们知道，事件是随机试验的某种结果，而随机试验的结果一般是不唯一的．如例 5 中，$\{$出现的点数恰好是 4$\}$是随机事件；$\{$出现的点数小于 4$\}$也是随机事件，这两种随机事件显然是不同的．若出现 1 点、2 点、3 点、4 点、5 点、6 点的事件，则分别记为 W_1，

W_2，W_3，W_4，W_5，W_6，并将事件{出现的点数小于 4}记为 B，则在一次试验中只要 W_1，W_2，W_3 中任一事件发生，则 B 发生．因此，事件 B 是由 W_1，W_2，W_3 组成的，记为 $B=\{W_1,W_2,W_3\}$．在这个试验里，事件 B 是可分解的事件；而事件 W_1，W_2，W_3 是不可再分解的事件，事件 W_1，W_2，W_3 在一次试验中不可能同时发生．

在随机试验中，不能分解的事件称为**基本事件**，记作 W_i，如上面所说的 W_1，W_2，…，W_6 都是基本事件．

全部基本事件组成的集合称为**样本空间**，通常用 Ω 表示．由集合论可知，基本事件就是样本空间 Ω 中的点元素，也称为**样本点**．如例 3 中，记 $W_1=$(正面向上)，$W_2=$(正面向下)，则 $\Omega=\{W_1,W_2\}$．

例 6　同时掷甲、乙两枚骰子，写出该试验的基本事件．

解　用记号 $W_{ij}=(i,j)$ $(i,j=1,2,3,4,5,6)$ 来表示这个随机试验的结果，其中 i 表示甲骰子出现的点数，j 表示乙骰子出现的点数，则这个随机试验的全部基本事件为

$W_{11}=(1,1)$，$W_{12}=(1,2)$，$W_{13}=(1,3)$，$W_{14}=(1,4)$，$W_{15}=(1,5)$，$W_{16}=(1,6)$，
$W_{21}=(2,1)$，$W_{22}=(2,2)$，$W_{23}=(2,3)$，$W_{24}=(2,4)$，$W_{25}=(2,5)$，$W_{26}=(2,6)$，
$W_{31}=(3,1)$，$W_{32}=(3,2)$，$W_{33}=(3,3)$，$W_{34}=(3,4)$，$W_{35}=(3,5)$，$W_{36}=(3,6)$，
$W_{41}=(4,1)$，$W_{42}=(4,2)$，$W_{43}=(4,3)$，$W_{44}=(4,4)$，$W_{45}=(4,5)$，$W_{46}=(4,6)$，
$W_{51}=(5,1)$，$W_{52}=(5,2)$，$W_{53}=(5,3)$，$W_{54}=(5,4)$，$W_{55}=(5,5)$，$W_{56}=(5,6)$，
$W_{61}=(6,1)$，$W_{62}=(6,2)$，$W_{63}=(6,3)$，$W_{64}=(6,4)$，$W_{65}=(6,5)$，$W_{66}=(6,6)$．

例 7　根据例 6 给出的基本事件，写出组成下列事件的基本事件．

（1）$A=$ {两枚骰子出现的点数之和不超过 4}；

（2）$B=$ {两枚骰子出现的点数之和等于 5}；

（3）$C=$ {两枚骰子出现的点数之积等于 6}．

解　（1）$A=\{W_{11},W_{12},W_{13},W_{21},W_{22},W_{31}\}$；

（2）$B=\{W_{14},W_{23},W_{32},W_{41}\}$；

（3）$C=\{W_{16},W_{23},W_{32},W_{61}\}$．

1.1.2　事件之间的关系及其运算

1. 事件的包含

若事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 B 包含事件 A，或事件 A 是事件 B 的子事件，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$．如例 5 中，设 $A=\{1$ 点$\}$，$B=\{$奇数点$\}$，则 $A\subset B$．

若 $B\supset A$，则事件 A 的每一个样本点都是事件 B 的样本点，如图 1-1 所示．

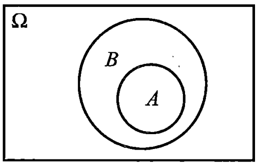


图 1-1

2. 事件相等

若 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

3. 事件的并（和）

事件 A 与 B 至少有一个发生，称为事件 A 与事件 B 的并（或和），记作 $A \cup B$．如例5中，设 $A = \{2\text{ 点}\}$，$B = \{4\text{ 点}\}$，$C = \{6\text{ 点}\}$，$D = \{\text{偶数点}\}$，则 $D = A \cup B \cup C$．

$A \cup B$ 的含义是“事件 A 发生，或者事件 B 发生，或者事件 A 与 B 同时发生”，图 1-2 中阴影部分表示 $A \cup B$．

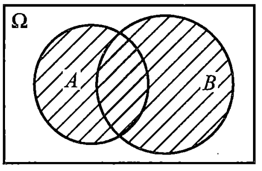


图 1-2

一般地，若事件 A 为任一随机事件，则有

$$A \cup A = A;\quad A \cup \Omega = \Omega;\quad A \cup \varnothing = A.$$

4. 事件的交（积）

事件 A 与 B 同时发生，称为事件 A 与事件 B 的交（或积），记作 $A \cap B$，或简记为 AB. 如例5中，设 $A = \{2\text{ 点}\}$，$B = \{\text{偶数点}\}$，则 $AB = A$．

$A \cap B$ 是事件 A 与事件 B 的所有公共样本点组成的集合，图 1-3 中阴影部分表示 $A \cap B$．

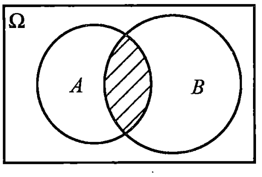


图 1-3

一般地，若 A 为任意随机事件，则有

$$A \cap A = A;\quad A \cap \Omega = A;\quad A \cap \varnothing = \varnothing .$$

5. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，称为事件 A 与事件 B 的差，记作 A
$A-B$ 是从 A 的样本点中去掉 A 与 B 的公共样本点后组成的集合，图
表示 $A-B$.

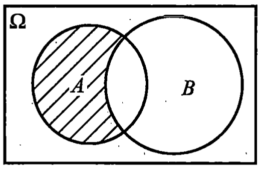
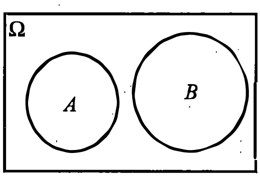


图 1-4

6. 互不相容事件（互斥事件）

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $A \cap B = \varnothing$ ，则称事件 A 与事件 B 互不相容（或事件 A 与事件 B 互斥）. 如例 5 中，设 $A=\{1\text{点}\}$，$B=\{2\text{点}\}$，则 A 与 B 互不相容，即 $AB=\varnothing$.

若事件 A 与事件 B 互不相容，则事件 A 与事件 B 没有公共的样本点，如图 1-5 所示.



排列组合·公式·性质

图 1-5

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中，任何两个事件都是互不相容的，即 $A_iA_j=\varnothing$ $(i, j=1,2,\cdots,n, \text{且} i \neq j)$，则称这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容. 显然，同一个随机试验的所有基本事件都是两两互不相容的.

当 A，B 互不相容时，$A \cup B$ 可记作 $A+B$. n 个两两互不相容的事件的并，即 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，可记作 $\sum_{i=1}^{n} A_i$.

7. 对立事件（逆事件）

浙大版 山东财经版

若 A 是任意随机事件，则称事件 $\Omega - A$ 为事件 A 的对立事件（或逆事件），记作 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=\Omega-A$.

显然，在任何试验中，事件 A 与事件 $\overline{A}$ 必然有一个独自发生. A 与 $\overline{A}$ 没有公共的样本点，并且 $\overline{A}$ 是从样本空间中去掉 A 所包含的样本点后余下的样本点组成的集合，即

$$A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad A+\overline{A}=\Omega,$$

图 1-6 中阴影部分表示 $\overline{A}$.

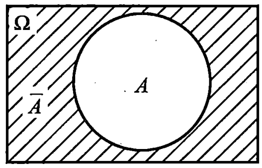


图 1-6

由 $\overline{A}=\Omega-A$，可知 $A=\Omega-\overline{A}$，也就是说 A 与 $\overline{A}$ 是互为对立事件，且有 $\overline{\overline{A}}=A$．如例 3 中，若设 $A=\{$正面向上$\}$，则 $\overline{A}=\{$反面向上$\}$，则 A 与 $\overline{A}$ 互为对立事件.

注 意

> 两个对立事件一定是互斥的，但两个互斥事件不一定是对立的. 如例 6 中事件 $A=\{1$ 点$\}$与 $B=\{2$ 点$\}$互斥，但不对立.

8. 事件的运算律

事件的运算满足以下定律：

（1）**重迭律**：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

（2）**交换律**：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（3）**结合律**：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（4）**分配律**：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

（5）**对偶律**（**或摩根定律**）：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这里只说明(4)中的第一个式子，即 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$．左边 $(A\cup B)\cap C$ 表示“A 发生或 B 发生，且 C 发生”，也就是“A 发生且 C 发生”或“B 发生且 C 发生”，这刚好是右边的事件 $(A\cap C)\cup(B\cap C)$．其他运算定律可进行类似说明.

例 8 对某一目标进行三次射击，$A=\{$第一次击中目标$\}$，$B=\{$第二次击中目标$\}$，$C=\{$第三次击中目标$\}$，试求下列各事件：

（1）$\{$至少有一次击中目标$\}$；

（2）$\{$三次都击中目标$\}$；

（3）$\{$第一次击中目标，第二、三次都没有击中目标$\}$；

（4）$\{$三次都没有击中目标$\}$.

解 （1）$\{$至少有一次击中目标$\}$就是 A，B，C 的和，即 $A\cup B\cup C$；

（2）$\{$三次都击中目标$\}$就是 A，B，C 同时发生，即 ABC；

（3）$\{$第一次击中目标，第二、三次都没有击中目标$\}$就是 $A\overline{B}\overline{C}$；

（4）{三次都没有击中目标}就是$\overline{ABC}$.

1.2　概率的定义

随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生，但是在多次重复试验中，它发生的可能性大小是可以“度量”的，概率就是用来度量随机事件发生的可能性大小的一个量. 这里，我们先从随机事件的频率出发，引出概率的统计定义，然后再给出概率的古典定义及其运算.

1.2.1　频率与概率的统计定义

1. 频率

设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 k 次（k 称为频数），则称 $\frac{k}{n}$ 为随机事件 A 的频率，记作 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{k}{n}.$$

显然，

$$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1,\quad f_n(\Omega)=1,\quad f_n(\varnothing)=0.$$

2. 频率的稳定性

随机事件 A 的频率具有一定的稳定性，即当试验次数充分大时，事件 A 的频率常在一个确定的常数附近波动.

例如，在“抛质地均匀的硬币”试验中，人们发现当抛的次数越多时，事件“正面向上”的频率就越接近于 $\frac{1}{2}$ 这个常数.

3. 概率的统计定义

定义 1　将试验重复 n 次，如果随着试验次数 n 的增大，事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 逐渐趋于某个确定的常数 $p\,(0<p<1)$，则称常数 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)=p$. 这个定义称为**概率的统计定义**.

在 1.1 节例 3 中，设 $A=\{正面向上\}$，则 $P(A)=\frac{1}{2}$.

对于任一随机事件 A，显然有：

（1）$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

（2）$P(\Omega)=1$；

（3）$P(\varnothing)=0$.

1.2.2 古典概型（等可能概型）

虽然我们已经建立了概率的统计定义，但是要按定义来求事件的概率是十分困难的. 因为只有做大量的重复试验才有可能得到这个稳定的数据，所以我们还要寻找计算事件概率的简便方法.

1. 古典概型

定义 2 凡具有以下特点的随机试验均称为**古典概型**（也称**等可能概型**）.

（1）试验的所有可能结果的个数是有限的；

（2）每一种结果发生的可能性是相等的.

例如，前面提到的抛硬币、掷骰子等试验都是古典概型.

2. 概率的古典定义

定义 3 对于古典概型，设试验所有的基本事件有 n 个，事件 A 包含基本事件 m 个，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{所含基本事件数}}{\text{样本空间所含基本事件总数}}=\frac{m}{n}.$$

这个定义称为**概率的古典定义**.

例 1 将一枚质地均匀的硬币连续抛三次，求恰好出现一次正面的概率与恰好出现两次正面的概率.

解 设 $A=\{出现一次正面\}$，$B=\{出现两次正面\}$，由于第一次抛硬币出现的结果为正面或反面，即二者取一，故有 C_2^1；同理，第二次、第三次出现的结果也为 C_2^1. 根据乘法原理可得，基本事件总数为 $n=C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1=8$.

事件 A 所含基本事件为（正，反，反），（反，正，反），（反，反，正），即

$$m_A=3.$$

事件 B 所含基本事件为（正，正，反），（正，反，正），（反，正，正），即

$$m_B=3.$$

因此，恰好出现一次正面的概率与恰好出现两次正面的概率分别为

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{3}{8}，\quad P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{3}{8}.$$

例 2　一只口袋中装有 4 只白球和 2 只红球，从袋中任意抽取两只球，分别按有放回和无放回两种情况抽样．求：

（1）取到的两只球都是白球的概率；

（2）取到的两只球是不同颜色的球的概率．

解　设 $A=\{$两个都是白球$\}$，$B=\{$两球的颜色不同$\}$，

有放回抽样的情况：从袋中有放回地抽取 2 只球，应按可重复排列公式计算．基本事件总数为

$$n=6^2=36.$$

（1）从 4 只白球中有放回地取出 2 只，共有 $m_A=4^2=16$ 种不同取法，故取到的两只球都是白球的概率为

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}.$$

（2）从 4 只白球和 2 只红球中各取 1 只，并且注意到顺序不同，就要算作不同取法，共有 $4\times2\times2=16$ 种不同取法，即 $m_B=16$，故取到的两只球是不同颜色的球的概率为

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}.$$

无放回抽样的情况：从袋中无放回地抽取 2 只球，应按排列组合公式计算，基本事件总数为

$$n=\mathrm{A}_6^2=6\times5=30.$$

（1）从 4 只白球中无放回地抽取 2 只，共有 $\mathrm{A}_4^2=4\times3=12$ 种不同取法，即 $m_A=12$，故取到的两只球都是白球的概率为

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}.$$

（2）从 4 只白球和 2 只红球中各取一只，共有 $4\times2\times2=16$ 种不同的取法，即 $m_B=16$，故取到的两只球是不同颜色的球的概率为

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}.$$

例 3　**（女士品茶问题）**一位常饮牛奶加茶的女士称她能从一杯冲好的饮料中辨别出先放牛奶还是先放茶，并且她在 10 次试验中都能正确地辨别出来，问该女士的说法是否可信？

解　设 $A=\{$在 10 次试验中都能猜出放置牛奶和茶的先后次序$\}$．每次试验的结果：先放牛奶后放茶；先放茶后放牛奶．10 次试验的可能性结果（样本点总数）为 2^{10}，则 10 次都猜对的概率为

$$P(A)=\frac{1}{2^{10}}\approx 0.000\,976\,6 .$$

由此可知，虽然该女士猜对的概率非常小，但是她的说法是可信的.

提 示

以上推断思想在统计假设检验中是常见的，我们将在统计部分详细展开论述.

例 4 （抽奖券问题）设某超市搞有奖促销活动，投放了 n 张奖券，其中只有一张有奖. 每位顾客可抽一张，求第 k 位顾客中奖的概率有多大？$(1\leqslant k\leqslant n)$

解 用 A 来表示“第 k 位顾客中奖”这一事件，则

$$P(A)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot 1}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}=\frac{1}{n}.$$

这一结果表明中奖与否同顾客抽奖次序无关，也就是说抽奖券活动对每位参与者来说都是公平的.

例 5 （生日问题）某班级有 50 名学生，一年按 365 天计算，求这 50 名学生生日各不相同的概率.

解 $P(\text{生日各不相同})=\frac{C_{365}^{50}\cdot(50)!}{365^{50}}=0.03$.

注 意

人们在长期实践活动中总结出这样的事实：小概率事件在一次试验中几乎不可能发生. 这一事实通常被称作**实际推断原理**. 由于上述 50 名学生生日各不相同的概率仅为 0.03，所以我们可以预测这 50 名学生中至少有 2 人生日相同.

3. 几何概型

前面，我们以随机事件的有限性和等可能性为前提，讨论了古典概型中事件概率的计算公式. 下面我们将其推广到无限多个基本事件的情形，而这些基本事件也具有某种等可能性.

如图 1-7 所示，向面积为 $S(\Omega)$ 的平面区域 Ω 内任意投掷一点（称为随机点），如果随机点落在 Ω 内任意一点的可能性相等；落在 Ω 内任意子区域 A 的可能性大小与 A 的面积成正比，与 A 的位置和形状无关，则称这样的试验为**平面上的几何概型**.

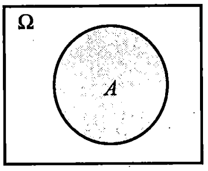


图 1-7

设 A 表示事件“随机点落在区域 A 内”，$S(A)$ 为区域 A 的面积，则事件 A 的概率为

$$P(A)=kS(A)\,,$$

其中 k 为比例系数．由于 $P(\Omega)=1$，所以 $P(\Omega)=kS(\Omega)=1$，于是

$$k=\frac{1}{S(\Omega)}\,,$$

进而有

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}\,,$$

即

$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}\,.$$

提 示

如果向直线上的区间内投掷随机点，则只需将上式中的面积改为长度；如果向空间区域内投掷随机点，则只需将面积改成体积，上述讨论依然成立．

例 6　某人午觉醒来发现自己的表停了，便打开收音机收听电台报时．已知电台每个整点报时一次，求他（她）能在 10 min 之内听到电台报时的概率．

解　由于上一次报时和下一次报时的时间间隔为 60 min，而这个人可能在 $(0,60)$ 内的任一时刻打开收音机，所以这是一个直线上的几何概型问题．用 x 表示他（她）打开收音机的时刻，A 表示事件“他（她）能在 10 min 之内听到电台报时”，则

$$\Omega=\{x\,|\,0<x<60\}\,,\quad A=\{x\,|\,50<x<60\}\subset\Omega\,,$$

于是

$$P(A)=\frac{60-50}{60-0}=\frac{1}{6}\,.$$

例 7　甲、乙两船在某码头的同一泊位停靠卸货，每只船都可能在早晨七点至八点间的任一时刻到达，并且卸货时间都是 20 min，求两只船使用泊位时发生冲突的概率．

解　因为甲、乙两船都在七点至八点间的 60 min 内任一时刻到达，所以甲到达的时刻 x 和乙到达的时刻 y 应满足

$$0<x<60\,,\quad 0<y<60\,,$$

即 (x,y) 为平面区域

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,0<x<60,0<y<60\}$$

内的任意一点，这是一个平面上的几何概型问题．设 A 表示事件“两只船使用泊位时发生冲突”（如图 1-8 所示），则

$$A=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in\Omega,|x-y|<20\}\,,$$

所以

$$P(A)=\frac{60^2-\dfrac{1}{2}\times 40\times 40\times 2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

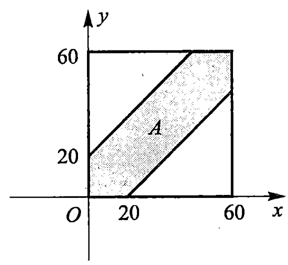


图 1-8

1.3　概率的性质和加法公式

1.3.1　概率的基本性质

由上一节内容可知，一个事件发生的概率是一个实数. 考虑到样本空间中每一个事件都有一个概率，故可以把概率看作是以事件为自变量的实值函数.

概率的基本性质如下.

性质 1（非负性）　任何随机事件 A 的概率都是非负的，即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质 2（规范性）　必然事件的概率等于 1，不可能事件的概率等于 0，即

$$P(\Omega)=1,\quad P(\varnothing)=0.$$

性质 3（完全可加性）　设事件 A，B 是互不相容的，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

推论 1　互为对立事件的概率之和为 1，即

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \text{ 或 } P(\overline{A})=1-P(A).$$

推论 2　若 $B\supset A$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

例 1　一批产品共有 50 件，其中 5 件次品不合格，从中任取 3 件进行检查，求其中至少有 1 件不合格的概率.

解法 1　设 $A=\{$其中至少有 1 件次品$\}$，$A_1=\{$3 件中恰有 1 件次品$\}$，$A_2=\{$3 件中恰有 2 件次品$\}$，$A_3=\{$3 件都是次品$\}$，则 A_1, A_2, A_3 两两互不相容，且 $A=A_1+A_2+A_3$，故所求概率为

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3),$$

$$P(A_1)=\frac{C_5^1\cdot C_{45}^2}{C_{50}^3}\approx 0.2525，\quad P(A_2)=\frac{C_5^2\cdot C_{45}^1}{C_{50}^3}\approx 0.0230，\quad P(A_3)=\frac{C_5^3}{C_{50}^3}\approx 0.0005.$$

所以

$$P(A)\approx 0.2525+0.0230+0.0005=0.2760.$$

解法 2　设 $A=\{$其中至少有 1 件次品$\}$，则 $\overline{A}=\{$3 件全是合格品$\}$，由古典概型可知，

$$P(\overline{A})=\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}\approx 0.7240，$$

所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})\approx 1-0.7240=0.2760.$$

显然，解法 2 比解法 1 的计算更简便.

1.3.2　概率的加法公式

上面性质 3 给出的概率加法公式仅适用于互斥事件，而对任意的两个事件 A 与 B，一般有以下概率加法公式.

定理　对于任意两个随机事件 A，B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证明　因为 $A\cup B=A+B\overline{A}$，$B=AB+B\overline{A}$，如图 1-9 所示，所以

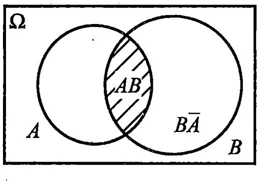


图 1-9

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B\overline{A})，\quad P(B)=P(AB)+P(B\overline{A})，$$

前式减后式，得

$$P(A\cup B)-P(B)=P(A)-P(AB)，$$

即

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

由此可以证明，概率的加法公式可以推广到有限个事件的和的情形. 下面给出三个事件的和的概率加法公式：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

例 2　袋中有红球、黄球、黑球各 1 个，有放回地抽取 3 次，每次任取 1 个，求“取

到的 3 个球中无红球或无黄球”的概率.

解 设 $A=\{3$ 个球中无红球$\}$，$B=\{3$ 个球中无黄球$\}$，则 $A\cup B=\{3$ 个球中无红球或无黄球$\}$，$AB=\{3$ 个球中无红球且无黄球，即全为黑球$\}$，于是

$$P(A)=\frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}=\frac{8}{27}=P(B)\text{，}\quad P(AB)=\frac{1\times1\times1}{3\times3\times3}=\frac{1}{27}.$$

因此，取到的 3 个球中无红球或无黄球的概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{15}{27}=\frac{5}{9}.$$

例 3 当 $A\subset B$ 时，证明 $P(A)\leqslant P(B)$.

证明 因为 $B=A\cup(B-A)$，且 $A(B-A)=\varnothing$，所以

$$P(B)=P(A)+P(B-A).$$

又由于 $P(B-A)\geqslant 0$，所以

$$P(A)\leqslant P(B).$$

1.4 条件概率与乘法公式

1.4.1 条件概率

1. 条件概率的定义

在实践中常遇到这种情况，事件 A 发生与否，直接影响事件 B 发生的概率 $P(B)$. 例如，在外形相同的 6 个球中，有 3 个黄球和 3 个白球，如果用无放回抽样方式连续抽取两球，问在第一次抽到白球的条件下第二次又抽到白球的概率是多少？

设 $A=\{$第一次抽到白球$\}$，$B=\{$第二次抽到白球$\}$. 那么，当 A 发生时，即第一次抽到白球时，由于不放回，所以第二次抽到白球的概率为 $\frac{2}{5}$；当 A 不发生时，即第一次抽到黄球时，显然第二次抽到白球的概率为 $\frac{3}{5}$.

可见，事件 B 发生的概率与事件 A 发生与否有着直接的关系.

定义 1 在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率称为**条件概率**，记作 $P(B\mid A)$.

上例中，$P(B\mid A)=\frac{2}{5}$，$P(B\mid\overline{A})=\frac{3}{5}$.

注 意

事件 A 发生与否也不一定会对事件 B 发生的概率有影响. 上例中，如果改为以有放回地抽样方式抽球两次，那么不管第一次抽到的是黄球还是白球，第二次抽到白球的概率总是 $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

2. 条件概率的计算公式

设 A，B 都是随机事件，且 $P(A)>0$，则

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

事实上，设试验的样本空间 $\Omega=\{n$ 个基本事件$\}$，事件 $A=\{m$ 个基本事件$\}$，$AB=\{r$ 个基本事件$\}$. 由古典概率公式得

$$P(AB)=\frac{r}{n}, \quad P(A)=\frac{m}{n}.$$

对于 $P(B\mid A)$，A 已经发生，那么就应该把样本空间缩小，在 A 所含的 m 个基本事件的范围内来考虑，即以 A 为新的样本空间，在这个范围里事件 $B\mid A$ 发生，即 AB 发生. 所以根据概率的古典定义得

$$P(B|A)=\frac{AB\text{所含基本事件}}{A\text{所含基本事件}}=\frac{r}{m}=\frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{P(AB)}{P(A)},$$

即

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\ (P(A)>0).$$

同理有

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\ (P(B)>0).$$

例 1　我国篮球队与某国篮球队进行比赛，某人预测我队在上半场领先的概率为 0.6，且下半场仍领先的概率为 0.5，试问我队在上半场领先后，获胜的概率有多大？

解　设 $A=\{$我队获胜$\}$，$B=\{$我队上半场领先$\}$，则 $A\mid B=\{$我队上半场领先后获胜$\}$. 由于

$$P(B)=0.6, \quad P(AB)=0.5,$$

所以

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.5}{0.6}\approx 0.83.$$

1.4.2　乘法公式

由条件概率公式

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\ (P(A)>0),$$

可得

$$P(AB)=P(A)P(B \mid A)\ (P(A)>0).$$

因此有以下定理：

定理 1　两事件 A，B 的积事件的概率等于其中一事件的概率乘以在该事件发生的条件下另一事件发生的概率，即

$$P(AB)=P(A)P(B \mid A)\ (P(A)>0)，或 P(AB)=P(B)P(A \mid B)\ (P(B)>0).$$

这就是概率的**乘法公式**.

概率的乘法公式可以推广至 3 个事件的积事件的概率，即

$$P(ABC)=P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB),$$

其中，$P(AB)>0$；也可以推广至任何 n 个事件的积事件的概率，即

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}),$$

其中，$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$.

例 2　设一盒中装有 10 只晶体管，其中 4 只是次品，6 只是正品，从中连续取两次，每次任取 1 只，取后不再放回，问两次都拿到正品管子的概率是多少？

解　设 $A=\{$第一次拿到的是正品管子$\}$，$B=\{$第二次拿到的是正品管子$\}$，$AB=\{$两次都拿到正品管子$\}$，则有

$$P(A)=\frac{6}{10},\quad P(B \mid A)=\frac{5}{9},$$

所以

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B \mid A)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}.$$

例 3　一批产品共 100 件，次品率为 10%，每次从中任取 1 件，取后不再放回，求连续取 3 次而在第 3 次才取得合格品的概率.

解　设 $A_i=\{$第 i 次取出的产品是合格品$\}\ (i=1,2,3)$，则所求的概率为

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})P(A_3 \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2}).$$

由于

$$P(\overline{A_1})=\frac{10}{100},\quad P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})=\frac{9}{99},\quad P(A_3 \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2})=\frac{90}{98},$$

所以

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=\frac{1}{10}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}\approx 0.0083 .$$

1.4.3　事件的相互独立性

1. 两个事件的独立性

一般来说，B 对 A 的条件概率 $P(B\,|\,A)$ 与 B 的概率 $P(B)$ 是不相等的．也就是说，事件 A 发生与否对事件 B 的概率是有影响的．但也存在这种情况，事件 A 发生与否并不影响事件 B 发生的概率，即

$$P(B\,|\,A)=P(B)\,,\quad P(A\,|\,B)=P(A)\,,$$

于是有如下定义：

定义 2　如果事件 A 的发生不影响事件 B 发生的概率，而且事件 B 的发生也不影响事件 A 发生的概率，即

$$P(B\,|\,A)=P(B)\,，\text{且}P(A\,|\,B)=P(A)\,,$$

则称事件 A 与事件 B **相互独立**．

例如，有 5 个球，其中有 3 个白球，2 个红球，现有放回地抽取两次，每次任取 1 个，记 $A=\{$第一次取到红球$\}$，$B=\{$第二次取到红球$\}$，则 $P(A)=\dfrac{2}{5}$，$P(B)=\dfrac{2}{5}$，而 $P(B\,|\,A)=\dfrac{2}{5}=P(B)$，$P(A\,|\,B)=\dfrac{2}{5}=P(A)$，故事件 A 与 B 是相互独立的．

定理 2　事件 A 与事件 B 相互独立的充要条件是 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$．

定理 3　若事件 A 与 B 相互独立，则下列各对事件：A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立．

例 4　两门高射炮各向一架飞机射击一次，它们击中飞机的概率分别是 0.6 和 0.7，求飞机被击中的概率．

解　设 $A=\{$第一门炮击中飞机$\}$，$B=\{$第二门炮击中飞机$\}$，则 $A\cup B=\{$飞机被击中$\}$，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\,.$$

因为 A 与 B 相互独立（第一、第二门炮击中与否相互不影响），则

$$P(AB)=P(A)P(B)\,.$$

所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.6+0.7-0.6\times 0.7=0.88\,,$$

即飞机被击中的概率为 0.88．

A与B独立：$P(A\cup B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$

2. 三个事件的独立性

定义 3 设 A，B，C 是三个事件，如果满足：

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A，B，C **相互独立**.

注 意

> 两两相互独立的事件，总起来并不一定是相互独立的.

一般地，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个随机事件，若其中任意 2 个，任意 3 个，…，任意 n 个事件的积事件的概率，等于各事件的概率之积，即

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **相互独立**.

例 5 加工某一零件共需经过三道工序，设第一、二、三道工序的次品数分别为 2%，3%，5%，假定各道工序是互不影响的，求加工出来的零件的次品率.

解 设 $A_i=\{第\ i\ 道工序出次品\}\ (i=1,2,3)$，$B=\{加工出来的零件是次品\}$，则

$$B=A_1\cup A_2\cup A_3,$$

$$\begin{aligned} P(B)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3) \\ &=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3), \end{aligned}$$

而 $P(A_1)=0.02$，$P(A_2)=0.03$，$P(A_3)=0.05$，又因各道工序是独立的，所以

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=0.02\times0.03=0.000\,6,$$
$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)=0.03\times0.05=0.001\,5,$$
$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)=0.02\times0.05=0.001\,0,$$
$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.02\times0.03\times0.05=0.000\,03,$$

于是

$$P(B)=0.02+0.03+0.05-0.000\,6-0.001\,5-0.001\,0+0.000\,03=0.096\,93.$$

提 示

> 上题也可用 $\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}=\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}$ 来求，读者可自行计算验证.

$P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3})=P(\overline{A_1A_2A_3})$

$=1-P(A_1A_2A_3)$

$=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

$=1-(1-0.02)(1-0.03)(1-0.05)$

1.5　全概率公式与逆概率公式

1.5.1　全概率公式

先看下面的例子：

例 1　某工厂生产甲、乙两种产品，甲产品占总产量的 70%，甲产品的合格率是 95%，乙产品的合格率是 90%，求该厂生产的产品的合格率．

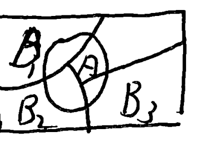
解　设 $A_1=\{$任取一件是甲产品$\}$，$A_2=\{$任取一件是乙产品$\}$，$B=\{$合格品$\}$，显然 A_1，A_2 互不相容，且 B 只能与 A_1 或 A_2 同时发生，即 $B=BA_1+BA_2$，所以

$$\begin{aligned}P(B)&=P(BA_1)+P(BA_2)\ （加法公式）\\&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)(B\mid A_2)\ （乘法公式）\\&=70\%\times95\%+30\%\times90\%=0.935\,.\end{aligned}$$

定理　设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组，即

（1）$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容；

（2）$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，且 $P(A_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$．



对任一事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

$PA=P(AB_1)+P(AB_2)\cdots$

则称上式为**全概率公式**．

例 2　设一仓库中有一批同样规格的产品，已知其中 50%由甲厂生产，30%由乙厂生产，20%由丙厂生产，且甲、乙、丙三个厂生产该产品的次品率分别为 $\frac{1}{10}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{20}$，现从中任取一件，求取到正品的概率．

解　设 $A_1=\{$取到的产品是甲厂生产的$\}$，$A_2=\{$取到的产品是乙厂生产的$\}$，$A_3=\{$取到的产品是丙厂生产的$\}$，$B=\{$取到的产品是正品$\}$，A_1，A_2，A_3 是一完备事件组．显然，

$$P(A_1)=0.5\,,\quad P(A_2)=0.3\,,\quad P(A_3)=0.2\,,$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{9}{10},\quad P(B\mid A_2)=\frac{14}{15},\quad P(B\mid A_3)=\frac{19}{20},$$

由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{5}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{14}{15}+\frac{2}{10}\times\frac{19}{20}=\frac{92}{100}=0.92\,.$$

1.5.2 逆概率公式（贝叶斯公式）

在例 2 中，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组，则对任一事件 $B\,(P(B)>0)$ 有

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\cdot P(B \mid A_j)}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

证明 因为 $P(B)=\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)$，所以

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)\cdot P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\cdot P(B \mid A_j)}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

上式称为**逆概率公式**，或**贝叶斯（Bayes）公式**.

例 3 在例 2 中，从中任取一件，若已知取到的是正品，求它分别是由甲、乙、丙厂生产的概率各是多少？

解 设 A_1，A_2，A_3，B 与例 2 同，由逆概率公式得

$$P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)}=\frac{0.5\times 0.9}{0.92}=\frac{45}{92}\approx 0.489,$$

$$P(A_2 \mid B)=\frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(B)}=\frac{28}{92}\approx 0.304,$$

$$P(A_3 \mid B)=\frac{P(A_3)P(B \mid A_3)}{P(B)}=\frac{19}{92}\approx 0.207.$$

例 4 血清甲胎蛋白诊断早期肝癌的跟踪统计如表 1-1 所示. 某人在检验中显阳性反应，求此人患有肝癌的概率.

表 1-1

不同情况	概率
被检验者确实患有肝癌的	0.04%
确实患有肝癌的病人在本法检验中显阳性反应的	95%
未患肝癌的人在本法检验中显阳性反应的	10%

解 设 $A=\{$被检验者确实患有肝癌$\}$，$B=\{$检验显阳性反应$\}$，则 $\overline{A}=\{$被检验者确实未患肝癌$\}$，$A \mid B=\{$阳性反应条件下，确实患有肝癌$\}$，因为 A 与 $\overline{A}$ 构成完备事件组，由贝叶斯公式，所求概率为

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)\cdot P(B \mid A)+P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})}=\frac{0.000\,4\times 0.95}{0.000\,4\times 0.95+0.999\,6\times 0.1}=0.38\%.$$

因此，当被检验者显阳性反应时，其患有肝癌的概率只有 0.38%.

1. 先看本校教材课后习题

2. 一定要按时睡觉 无论什么都要完成

3. 不做无效计划 不闲逛 少浪费

1.6 伯努利试验与二项概率公式

1.6.1 伯努利试验

定义 1　在相同条件下进行 n 次试验，若每次试验的结果互不影响，则称这 n 次试验为**重复独立试验**.

例如，对同一目标进行多次射击，每次射击结果与其他各次射击无关，这样的多次射击是重复独立试验.

定义 2　如果试验 E 只有两个可能的结果，即事件 A 发生或不发生，并且事件 A 发生的概率为 $p\,(0<p<1)$，事件 A 不发生的概率为 $q\,(q=1-p)$，则称试验 E 为**伯努利试验**.

定义 3　将伯努利试验 E 独立地重复进行 n 次的试验，称为 n **重伯努利试验**.

例如，将一枚硬币重复抛 5 次，观察出现正反面的试验，属于 5 重伯努利试验；而将一颗骰子重复掷 5 次，观察出现点数的试验，是重复独立试验，而不是伯努利试验，这是因为该试验结果不止两种.

1.6.2 二项概率公式

一般地，在 n 重伯努利试验中，事件 A 在 n 次试验中恰好发生 k 次（$k=0,1,2,\cdots,n$）的概率简记为 $P_n(k)$.

定理　在 n 重伯努利试验中，如果每次试验事件 A 发生的概率为 $p\,(0<p<1)$，事件 A 不发生的概率为 q，则事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},$$

成功 → 失败

n次中k成功

其中，$p+q=1$，$k=0,1,2,\cdots,n$.

证明　由乘法公式及事件的独立性可知，在 n 次试验中，事件 A 在前 k 次中发生，而在其余的 $n-k$ 次中不发生的概率为

$$\underbrace{p\cdot p\cdots p}_{k\text{个}}\cdot\underbrace{q\cdot q\cdots q}_{n-k\text{个}}=p^k q^{n-k},$$

所以，事件 A 在 n 次试验中恰好发生 k 次的概率为 $\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$，即

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},$$

其中，$0<p<1$，$p+q=1$，$k=0,1,2,\cdots,n$. 显然有

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1 .$$

由于公式 $\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$ 恰为二项式 $(p+q)^n$ 的展开式的第 $k\ (k=0,1,2,\cdots,n)$ 项，所以上述公式称为**二项概率公式**.

例 1 某射手对同一目标进行 5 次独立射击，每次命中目标的概率为 0.8，求：

（1）在 5 次射击中恰好有 3 次命中目标的概率；

（2）在 5 次射击中至少命中 1 次的概率.

解 5 次射击显然是相互独立的，因此，它是 5 重伯努利试验，这里

$$n=5,\ p=0.8,\ q=0.2,$$

（1）5 次射击中恰好有 3 次命中目标的概率为

$$P_5(3) = \mathrm{C}_5^3 p^3 q^2 = 10 \times 0.8^3 \times 0.2^2 = 0.204\,8 .$$

（2）设 $A=\{5$ 次射击中至少命中目标 1 次$\}$，则

$$P(A) = \sum_{k=1}^{5} P_5(k) = 1 - P_5(0) = 1 - \mathrm{C}_5^0 P^0 q^5 = 1 - 0.2^5 = 0.999\,68 .$$

例 2 有 100 件产品，其中有 90 件正品，10 件次品，现

（1）有放回地抽取 4 次，每次取 1 件；

（2）无放回地抽取 4 次，每次取 1 件.

求恰好抽到 3 件次品的概率.

解 （1）有放回地抽取 4 次，属于 4 重伯努利试验，故所求概率为

$$P_4(3) = \mathrm{C}_4^3 (0.1)^3 \cdot 0.9^1 = 0.003\,6 .$$

（2）无放回地抽取不属于 n 重伯努利试验，由古典概型可得所求概率为

$$P = \frac{\mathrm{C}_{10}^3 \mathrm{C}_{90}^1}{\mathrm{C}_{100}^4} \approx 0.002\,8 .$$

提 示

从上述例子中可以看出，两种情况得到的概率相差不大. 当产品的批量很大时，两者的误差还会更小，所以此时可把“无放回”近似当作“有放回”来处理.

习题 1

1．指出下列各事件中哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件.

（1）$A=\{$没有水分，种子会发芽$\}$；

（2）$B=\{$从一副 52 张的扑克牌中，任意抽取 14 张，至少有两种花色$\}$；

（3）$C=\{$电话交换台在 1 h 内至少接受 20 次呼叫$\}$；

（4）$D=\{$从一副扑克牌中随机抽出的一张牌，是红桃$\}$.

2．写出下列随机试验的样本空间 Ω.

（1）记录一个小班一次数学考试的平均分数（以百分制记分）；

（2）生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数；

（3）对某工厂生产的产品进行检查，合格的盖上“正品”，不合格的盖上“次品”，如连续查出 2 件次品就停止检查，或检查 4 件产品就停止检查，记录检查的结果．记查出合格品为“1”，查出次品为“0”，则连续出现两个“0”就停止检查，或查满 4 次就停止检查.

3．设 A，B，C 为三个事件，用 A，B，C 的运算关系表示下列事件.

（1）A 发生，B 与 C 不发生；$A\bar{B}\bar{C}$

（2）A，B 都发生，而 C 不发生；$AB\bar{C}$

（3）A，B，C 中至少有 1 个发生；$\Omega-\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $A\cup B\cup C$

（4）A，B，C 都发生；ABC

（5）A，B，C 都不发生；$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

（6）A，B，C 中不多于 1 个发生；$\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{B}\bar{C}=A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

（7）A，B，C 中不多于 2 个发生；$\overline{ABC}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

（8）A，B，C 中至少有 2 个发生．$AB\cup AC\cup BC=AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$

4．连续进行三次射击，设 $A_i=\{$第 i 次射击命中$\}(i=1,2,3)$，$B=\{3$ 次射击恰好命中 2 次$\}$，$C=\{3$ 次射击至少命中 2 次$\}$．试用 A_i 表示 B 和 C.

5．从一副 52 张的扑克牌中任抽 4 张，求抽取 4 张花色各不相同的牌的概率.

6．现有产品 50 件，其中次品 4 件．现从中任取 3 件，求 3 件中至少有 1 件是次品的概率.

7．一批灯炮有 40 只，其中有 3 只是坏的．现从中任取 5 只检验．求：

（1）5 只都是好的概率；

（2）5 只中有 2 只坏的概率.

8．从 13 张红桃扑克牌中有放回地抽取 3 次，每次任取 1 张，求没有同号的概率.

9．在打靶中，若“命中 10 环”的概率是 0.40，“命中 8 环或 9 环”的概率为 0.45，求至少命中 8 环的概率.

10．飞机投弹炸仓库，已知投一弹命中第 1，2，3 仓库的概率分别为 0.01，0.02，0.03，求飞机投一弹没有命中仓库的概率.

11．据调查，某学院学生在课余时间有 62%爱读文艺书籍，有 45%爱读科技书籍，有 16%兼读文艺与科技书籍，问学生中至少爱读上述一种读物的概率是多少？

5. 设A表示从52张中取4张花色不同的牌

$n(\Omega)=C_{52}^{4}$

$n(A)=C_{13}^{1}\cdot C_{13}^{1}\cdot C_{13}^{1}\cdot C_{13}^{1}=13^4$

$P(A)=\frac{13^4}{C_{52}^{4}}$

7. 设A_i表示坏的个数

$P(A_5)=\frac{C_{37}^{5}}{C_{40}^{5}}$

$P(A_2)=\frac{C_3^2C_{37}^{3}}{C_{40}^{5}}$

9. $P=0.40+0.45$

12．房间里有 10 人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，现任选 3 人记录其纪念章的号码，求：

（1）最小号码为 5 的概率；

（2）最大号码为 5 的概率．

13．现有甲、乙两批种子，发芽率分别为 0.8 和 0.7，从两批种子中随机各取一粒，试求：

（1）两粒都发芽的概率；

（2）至少有一粒发芽的概率；

（3）恰有一粒发芽的概率．

<1> $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

<2> $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

<3> $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

14．甲、乙两市都位于长江下游，据 100 年来的气象记录，一年中雨天的比例甲市为 20%，乙市为 18%，两市同时下雨为 12%，设 $A=\{$甲市出现雨天$\}$，$B=\{$乙市出现雨天$\}$．求：

（1）$P(B|A)$；（2）$P(A|B)$；（3）$P(A\cup B)$．

15．某电子计算器使用寿命为 15 年的概率为 0.8，使用寿命为 20 年的概率为 0.4．问现在已使用了 15 年的这种电子计算器再用 5 年的概率是多少？

16．某厂生产的产品合格率为 0.98，而在合格产品中一等品的概率为 0.9，求该厂生产一等品的概率．

W2 17．三个人独立破译一密码，他们能独立译出的概率分别为 0.25，0.35，0.4，求此密码被译出的概率．

18．某厂购进两批零件，已知第一批零件的次品率为 0.03，第二批的次品率为 0.01，又知第二批零件比第一批零件多一倍，两批零件入库后堆放在一起，从中任取一个零件，试求该零件为次品的概率．

W2 19．有三只盒子，甲盒中装有 2 支红笔、4 支蓝笔；乙盒中装有 4 支红笔、2 支蓝笔；丙盒中装有 3 支红笔、3 支蓝笔．现从中任取一支，设到三只盒子中取笔的机会相同．

（1）求取到的是红笔的概率；

（2）若已知取到的是红笔，求它是从甲盒中取出的概率．

20．某工厂生产的产品中 96%是合格品，检查产品时，一个合格品被误认为是次品的概率为 0.02，一个次品被误认为是合格品的概率为 0.05，求在被检查后合格品确实是合格品的概率．

W2 21．已知男人中有 5%是色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者．现从男女人数相等的人群中随机挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

22．一批产品中有 30%是一等品，进行重复抽样检查，共取 5 个样品，求：

（1）取出的 5 个样品中恰有 2 个一等品的概率；

（2）取出的 5 个样品中至少有 2 个一等品的概率．

23．假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若一周五个工作日里每天是否发生故障相互独立，试求一周五个工作日里发生 3 次故障的概率．

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{20}}{21/800}=\frac{20}{21}$$

$$P(A)=\frac{1}{2}\quad P(B|A)=0.05$$

$$P(\bar{A})=\frac{1}{2}\quad P(B|\bar{A})=0.0025$$

第 2 章　随机变量及其分布

$$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{20}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{400}=$$

随机事件是随机试验中可能发生也可能不发生的事件，它仅是一种定性的描述．为了深入研究随机试验的结果，揭示其统计规律，还需引入随机变量这一重要概念．

2.1　随机变量

2.1.1　随机变量的概念

为了说明什么是随机变量，先看下面的例子：

例 1　设有产品 100 件，其中有 5 件次品，95 件正品，现从中任意抽取 20 件，问“抽得的次品数”是多少？

很明显，“次品数”可能是 1，也可能是 $2,3,4,5$ 或者是 0（即抽得的 20 件中无次品）．如果我们用变量“ξ”来表示抽到的“次品数”，则“$\xi=i$”表示“抽到 i 件次品”（$i=0,1,2,3,4,5$）．

如果用 ω_i 表示这一随机现象的基本事件，其中 i 表示抽到的次品数，那么各个基本事件 ω_i 就和 ξ 的取值 i 对应起来了，通常记为

$$\omega_i=\{\xi=i\}\ (i=0,1,\cdots,5)\ .$$

上述随机现象所出现的其他可能的结果，如“抽到的产品数不超过 4”这一事件 A 也可用变量 ξ 来表示，即

$$A=\{\xi\leqslant 4\}\text{ 或 }A=\{\xi=0\}\cup\{\xi=1\}\cup\{\xi=2\}\cup\{\xi=3\}\cup\{\xi=4\}\ .$$

这样，就把随机现象的各种可能结果和变量对应起来了．也就是说，我们可以用一个变量取不同的值（或范围）表示随机现象的各种结果．由于在试验之前不能断定这个变量取哪个确定值，即它的取值具有随机性，所以把这个变量称为随机变量．

定义 1　设随机试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，若对于 Ω 的每一个元素 ω，即对于试验的每一个可能的结果，实变量 ξ 都有一个确定的值与之对应，则称 ξ 为**随机变量**．它常用希腊字母 ξ,η 或大写英文字母 X,Y 等表示．

例 2　掷一枚质量分布均匀的骰子，观察其点数．设“出现的点数”为 ξ，则 ξ 是一个随机变量，其可能取的值为 $1,2,3,4,5,6$ ．

例 3 某射手每次射击打中目标的概率为 0.7，现连续向一个目标射击，直到击中目标为止．设“射击次数”为ξ，则ξ是一个随机变量，其可能取的值为$1,2,\cdots$．

例 4 某公共汽车站每隔 5 min 有一辆汽车通过．一乘客不知道汽车通过该站的时间，他可能在任一时刻到达车站候车．设该乘客的候车时间为ξ，则ξ是一个随机变量，其可能取的值在$0\leqslant\xi<5$范围内．

引入随机变量后，随机事件就可以通过随机变量来表示．如例 2 中“出现 3 点”这个随机事件可用$\{\xi=3\}$来表示；又如例 3 中“直到第 10 次才击中”这个随机事件可用$\{\xi=10\}$来表示．

2.1.2 随机变量的类型

根据取值特点的不同，随机变量可分为**离散型随机变量**和**非离散型随机变量**两种．

1．离散型随机变量

如果随机变量所有可能取的值是有限个或可数无穷多个，则称这个随机变量为**离散型随机变量**．如例 2 和例 3 中的ξ都是离散型随机变量，其中，例 2 是取值为有限个的情形，例 3 是取值为可数无穷多个的情形．

2．非离散型随机变量

如果随机变量可能取的值不能一一列举出来，则称这个随机变量为**非离散型随机变量**．如例 4 中的ξ是非离散型随机变量．

2.2 离散型随机变量的分布律

2.2.1 相关概念

要掌握一个离散型随机变量的变化规律，除了要知道它有哪些可能取的值外，还要知道各个取值的概率．

定义 设离散型随机变量ξ所有可能取的值为$x_i\ (i=1,2,\cdots)$，ξ取各个可能值的概率（即事件$\{\xi=x_i\}$的概率）为

$$P\{\xi=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots), \tag{2-1}$$

则式（2-1）称为离散型随机变量ξ的**分布律**．

分布律也可用表格的形式来表示，如表 2-1 所示．

表 2-1

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
$P\{\xi=x_i\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

由概率的基本性质可知，p_i 满足如下两个条件：

（1）$p_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots$；

（2）$\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$．

例 1　用随机变量描述掷一枚骰子的试验．

解　设掷一枚骰子出现的点数为 ξ，则 ξ 是一个随机变量．它所有可能取的值为 1，2，3，4，5，6．由于骰子是结构均匀的正六面体，所以 ξ 取各个可能值的概率相同，都为 $\frac{1}{6}$．于是 ξ 的分布律为

$$P\{\xi=k\}=\frac{1}{6}\ (k=1,2,3,4,5,6),$$

如表 2-2 所示．

表 2-2

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

提示

一般地，如果随机变量的概率分布为

$$P\{\xi=x_i\}=\frac{1}{n}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

其中 n 为正整数，并且当 $i \neq j$ 时，有 $x_i \neq x_j$，这时称随机变量 ξ 服从离散型均匀分布．

2.2.2　常见的离散型随机变量分布

1．两点分布

若随机变量 ξ 只能取 0 和 1 两个值，其分布律是

$$P\{\xi=i\}=p^i(1-p)^{1-i},$$

其中，$0<p<1, i=0,1$，则称ξ服从**两点分布**或**（0-1）分布**.

（0-1）分布的分布律也可以写成表 2-3 的形式.

表 2-3

ξ	0	1
P	$1-p$	p

提 示

在实践中，服从（0-1）分布或用（0-1）分布来表示的随机变量有很多．例如，检查一件产品是正品还是次品，可通过ξ取 0 或 1 来表示，则ξ服从（0-1）分布.

例 2　一射手对某一目标进行射击，一次命中的概率为 0.8．求：

（1）一次射击的分布律；

（2）从射击到击中目标为止，所需射击次数的分布律.

解　（1）设“$\xi=1$”表示击中目标，“$\xi=0$”表示没击中目标，显然这是一个（0-1）分布，即

$$P_0=P\{\xi=0\}=0.2, P_1=P\{\xi=1\}=0.8,$$

对应的分布律如表 2-4 所示.

表 2-4

ξ	0	1
$P\{\xi=i\}$	0.2	0.8

（2）设从射击到击中目标为止，射击次数为随机变量η $(\eta=1,2,\cdots,k,\cdots)$，则所需射击次数$\eta$的分布律如表 2-5 所示.

表 2-5

η	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
$P\{\eta=k\}$	0.8	0.2×0.8	$\cdots$	$0.2^{k-1}\times0.8$	$\cdots$

2. 二项分布

若随机变量ξ的概率分布为

$$P\{\xi=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}, \tag{2-2}$$

其中，$0<p<1, q=1-p, k=0,1,2,\cdots,n$，显然

$$P\{\xi=k\}\geqslant 0, 且\sum_{k=0}^{n}P\{\xi=k\}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1,$$

超几何分布 $P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$，$k=0,\cdots\min\{n,M\}$

N中取n　$X\sim H$

则称 ξ 服从参数为 n, p 的**二项分布**，记作 $\xi \sim B(n, p)$.

提　示

> 如果用 ξ 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，那么 ξ 服从二项分布. 特别地，当 $n=1$ 时，式（2-2）化为 $P\{\xi=i\}=p^k q^{1-k}\ (k=0,1)$，这就是（0-1）分布.

例 3　某车间有 10 台机床，每台机床由于各种原因时常需要停车. 设各台机床的停车或开车是相互独立的，若每台机床在任一时刻处于停车状态的概率为 $\frac{1}{3}$，求任一时间车间里有 3 台机床处于停车状态的概率.

解　设 ξ 表示任一时刻 10 台机床中处于停车状态的机床台数，ξ 是一个离散型随机变量，且 $\xi \sim B\left(10, \frac{1}{3}\right)$，则所求概率为

$$P\{\xi=3\}=\mathrm{C}_{10}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{7} \approx 0.260 .$$

3. 泊松（Poisson）分布

若随机变量 ξ 的概率为

$$P\{\xi=k\}=\frac{\lambda^{k} \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}, \tag{2-3}$$

其中，$k=0,1,2,\cdots$，$\lambda>0$ 是常数，则称 ξ 服从参数为 λ 的**泊松分布**，记作 $\xi \sim P(\lambda)$. 显然有

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi=k\}=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k} \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda}=1 .$$

下面介绍一个用泊松分布来逼近二项分布的定理.

泊松定理　设 $\lambda>0$ 是一个常数，n 是任意正整数. 设 $np=\lambda$，则对于任意固定的非负整数 k，有

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{C}_{n}^{k} p^{k}(1-p)^{n-k}=\frac{\lambda^{k} \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} .$$

可以证明，当 $n \to \infty$ 时，二项分布的极限分布恰为泊松分布. 所以，若事件 A 发生的概率 p 很小，而试验次数 n 很大，即 np 适中时，事件 A 在 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率可用泊松分布 $P(\lambda)$ 来近似计算，其中 $\lambda=np$.

例 4　某电话总机每分钟接到的呼叫次数服从参数为 5 的泊松分布，求：

（1）每分钟恰好接到 7 次呼叫的概率；

（2）每分钟接到的呼叫次数大于 4 的概率.

解 设每分钟接到的呼叫次数为ξ，则$\xi \sim P(\lambda)$，$\lambda = 5$．

（1）每分钟恰好接到 7 次呼叫的概率为

$$P\{\xi = 7\} = \frac{5^7 e^{-5}}{7!} \approx 0.104\,44 .$$

（2）每分钟接到的呼叫次数大于 4 的概率为

$$\begin{aligned} P\{\xi > 4\} &= 1 - P\{\xi \leqslant 4\} = 1 - P\{\xi = 0\} - P\{\xi = 1\} - P\{\xi = 2\} - P\{\xi = 3\} - P\{\xi = 4\} \\ &\approx 1 - 0.006\,73 - 0.033\,69 - 0.084\,22 - 0.140\,37 - 0.175\,47 = 0.559\,52 . \end{aligned}$$

例 5 设有一批产品的次品率为 0.02，如果购买 400 个这种产品，求至少有 2 个次品的概率.

解 设ξ表示 400 个产品中含有的次品数，则$\xi \sim B(400, 0.02)$，ξ的概率分布为

$$P\{\xi = k\} = C_{400}^{k} \times 0.02^k \times 0.98^{400-k} \ (k = 0, 1, 2, \cdots, 400) .$$

所求概率为

$$P\{\xi \geqslant 2\} = 1 - P\{\xi = 0\} - P\{\xi = 1\} = 1 - 0.98^{400} - 400 \times 0.02 \times 0.98^{399} .$$

但是，以上计算相当麻烦，故下面采用泊松分布来近似计算，即

$$P\{\xi = k\} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \ (\lambda = np = 400 \times 0.02 = 8), P\{\xi = 0\} = e^{-8}, P\{\xi = 1\} = 8e^{-8},$$

于是

$$P\{\xi \geqslant 2\} \approx 1 - (e^{-8} + 8e^{-8}) = 1 - 9e^{-8} \approx 1 - 0.003 = 0.997 .$$

提 示

由上例可以看出，一个事件虽然在一次试验中发生的概率很小，但当试验次数多且独立进行时，该事件发生的概率可能会很大.

2.3 随机变量的分布函数

上节给出的离散型随机变量，由于其全部可能取值可一一罗列，故可用分布律来描述. 但实际上很多随机变量都是非离散的，即其全部可能取的值不是有限个或可数无穷多个，如等车时间、元件的寿命等. 这种随机变量的特点是，它们可能取某一区间内的所有值，此时研究事件$\{\xi = x_i\}$的概率往往意义不大. 如果我们直接研究事件$\{x_1 < \xi < x_2\}$的概率，可用分布函数来描述.

2.3.1　分布函数的概念

$\xi \leqslant x$

$F(x)=P(\xi \leqslant x)$

定义　设 ξ 是一个随机变量，x 是任意实数 $(-\infty < x < +\infty)$，则函数

$$F(x) = P\{\xi < x\}$$

称为随机变量 ξ 的**分布函数**.

例 1　离散型随机变量 ξ 的分布律如表 2-6 所示，求 ξ 的分布函数.

表 2-6

ξ	0	1	2
P	0.5	0.3	0.2

解　ξ 可能取的值为 0，1，2.

当 $x<0$ 时，事件 $\{\xi \leqslant x\}$ 为不可能事件，因此

$$F(x) = P\{\xi \leqslant x\} = 0\text{；}$$

当 $0 \leqslant x < 1$ 时，事件 $\{\xi \leqslant x\}$ 即为 $\{\xi = 0\}$，因此

$$F(x) = P\{\xi \leqslant x\} = P\{\xi = 0\} = 0.5\text{；}$$

当 $1 \leqslant x < 2$ 时，事件 $\{\xi \leqslant x\}$ 即为 $\{\xi = 0\}$ 与 $\{\xi = 1\}$ 之和，因此

$$F(x) = P\{\xi \leqslant x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} = 0.5 + 0.3 = 0.8\text{；}$$

当 $x \geqslant 2$ 时，事件 $\{\xi \leqslant x\}$ 即为事件 $\{\xi = 0\}$，$\{\xi = 1\}$ 与 $\{\xi = 2\}$ 之和，因此

$$F(x) = P\{\xi \leqslant x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} = 0.5 + 0.3 + 0.2 = 1 .$$

综上所述，所求 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0.8, & 1 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

提　示

例 1 中，$F(x)$ 的图形如图 2-1 所示. 可见，离散型随机变量的分布函数一般是一个阶梯函数，在 ξ 的每个概率点处（如本题的 $x=0$，$x=1$ 和 $x=2$）都有一个跳跃.

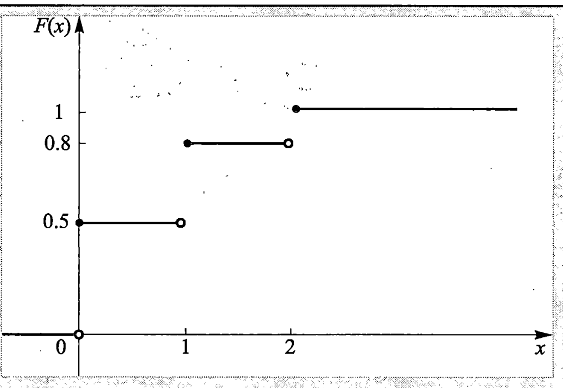


图 2-1

2.3.2 分布函数的性质

随机变量的分布函数具有以下性质.

（1）$0 \leqslant F(x) \leqslant 1$，即 $F(x)$ 是一个定义域为全体实数，值域为区间 $[0,1]$ 的实值函数.

（2）因 $F(x)$ 在 x_0 处的函数值 $F(x_0)$ 在几何上表示随机点 ξ 落在区间 $(-\infty, x_0]$ 的概率，故对任意两实数 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$，有

$$P\{x_1 < \xi \leqslant x_2\} = P\{\xi \leqslant x_2\} - P\{\xi \leqslant x_1\} = F(x_2) - F(x_1),$$

如图 2-2 所示. 因此，若知道 ξ 的分布函数 $F(x)$，就可以计算 ξ 落在任一区间 $(x_1, x_2]$ 内的概率.

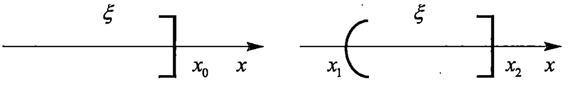


图 2-2

（3）$F(x)$ 是 x 的单调不减函数，即对任意 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$，有

$$F(x_1) \leqslant F(x_2).$$

（4）$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$，记作 $F(+\infty) = 1$，

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$，记作 $F(-\infty) = 0$.

例 2 设随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, & 1 \leqslant x < 2, \\ \dfrac{1}{2}, & 2 \leqslant x < 3, \\ 1, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

试求：（1）$P\{\xi \leqslant 2\}$；（2）$P\{1<\xi \leqslant 3\}$；（3）$P\left\{\xi > \dfrac{3}{2}\right\}$.

解　（1）$P\{\xi \leqslant 2\} = F(2) = \dfrac{1}{2}$；

（2）$P\{1<\xi \leqslant 3\} = F(3) - F(1) = \dfrac{1}{2} - 0 = \dfrac{1}{2}$；

（3）$P\left\{\xi > \dfrac{3}{2}\right\} = 1 - P\left\{\xi \leqslant \dfrac{3}{2}\right\} = 1 - F\left\{\dfrac{3}{2}\right\} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

2.4　连续型随机变量的概率密度

本节主要介绍非离散型随机变量中最重要的随机变量——连续型随机变量.

2.4.1　基础知识

1. 定义

定义　对于随机变量 ξ，若存在非负可积函数 $\varphi(x)(-\infty < x < +\infty)$，使得对于任意实数 x，ξ 的分布函数都可以表示为

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t \,, \tag{2-4}$$

则称 ξ 为**连续型随机变量**，$\varphi(x)$ 称为**概率密度函数**，简称**概率密度**.

式(2-4)的几何意义是：ξ 落在区间 (a,b) 内的概率等于区间 $[a,b]$ 上曲线 $y=\varphi(x)$ 下的曲边梯形的面积，如图 2-3 所示.

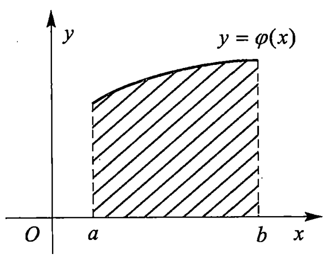


图 2-3

由上述定义可知，连续型随机变量 ξ 取任一指定实数 a 的概率必为零，即

$$P\{\xi = a\} = 0 \,.$$

由此可知

$$P\{a \leqslant \xi \leqslant b\} = P\{a < \xi \leqslant b\} = P\{a \leqslant \xi < b\} = P\{a < \xi < b\}.$$

注意

虽然 $\xi = a$ 时的概率为零，但是事件 $\{\xi = a\}$ 是有可能发生的，因此概率为零的事件并非一定是不可能事件.

2. 概率密度的性质

由概率密度的定义，可得以下性质：

（1）$\varphi(x) \geqslant 0$；

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \mathrm{d}x = 1$；

（3）对任意实数 $a, b\ (a \leqslant b)$，有

$$P\{a \leqslant \xi < b\} = \int_a^b \varphi(x) \mathrm{d}x;$$

（4）若 $F(x)$ 为分布函数，则在 $\varphi(x)$ 的连续点上，有 $F'(x) = \varphi(x)$.

可以证明，凡满足性质（1）（2）两个条件的任一函数均可作为某一随机变量的概率密度.

例 1 设随机变量 ξ 的概率密度为

$$\varphi(x) = C\mathrm{e}^{-|x|} \ (-\infty < x < +\infty).$$

求：（1）常数 C；（2）ξ 落在区间 $(0, 1)$ 内的概率.

解 （1）由概率密度的性质可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \mathrm{d}x = 1,$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} C\mathrm{e}^{-|x|} \mathrm{d}x = C\left(\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x} \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x\right) = C\left(\mathrm{e}^{x}\Big|_{-\infty}^{0} - \mathrm{e}^{-x}\Big|_{0}^{+\infty}\right) = 2C = 1,$$

所以 $C = \dfrac{1}{2}$.

（2）ξ 落在区间 $(0, 1)$ 内的概率为

$$P\{0 < \xi < 1\} = \int_0^1 \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-x}\Big|_1^0 = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1}) \approx 0.316.$$

2.4.2　三种常见的连续型随机变量的分布

1. 均匀分布

若连续型随机变量 ξ 在有限区间 $[a,b]$ 上取值，其概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{2-5}$$

则称 ξ 在区间 $[a,b]$ 上服从**均匀分布**，记为 $\xi\sim U(a,b)$.

例 2　设某种灯泡的使用寿命 ξ 是一个随机变量，均匀分布在 1 000～1 200 h，求 ξ 的概率密度以及 ξ 在 1 060～1 150 h 内取值的概率.

解　设 $a=1000$，$b=1200$，则 ξ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{200}, & 1000\leqslant x\leqslant 1200,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

从而

$$P\{1060<\xi<1150\}=\int_{1060}^{1150}\frac{1}{200}\mathrm{d}x=\frac{90}{200}=\frac{9}{20}.$$

2. 正态分布

若连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty), \tag{2-6}$$

其中 $\mu,\sigma\ (\sigma>0)$ 为常数，则称 ξ 服从参数为 μ,σ 的**正态分布**或**高斯**（Gauss）**分布**，记为 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$.

特别地，若 $\xi\sim N(0,1)$，即 $\mu=0,\sigma=1$，称 ξ 服从**标准正态分布**，其概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\quad(-\infty<x<+\infty). \tag{2-7}$$

如果标准正态分布的分布函数记为 $\Phi(x)$，则

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

由式（2-7）可得到正态分布的概率密度曲线，如图 2-4 所示. 图形关于直线 $x=\mu$ 对

称，且在$x=\mu$处达到最大值$\varphi(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. 这说明$\mu$是正态分布的中心，$x$离$\mu$越远，$\varphi(x)$的值就越小；概率密度曲线以$x$轴为渐近线，它在$x=\mu\pm\sigma$处有拐点. 若固定$\sigma$，改变$\mu$的值，那么$\varphi(x)$的图形形状不变，只是沿着$x$轴平行移动，所以参数$\mu$决定了曲线的中心位置. 若固定$\mu$，由最大值$\varphi(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$可知，$\sigma$越小，图形变得越陡，$\xi$的取值就越集中在$\mu$的附近；反之，$\sigma$越大，图形变得越平缓，$\xi$的取值就越分散，因此$\sigma$反映了$\xi$取值的分散程度.

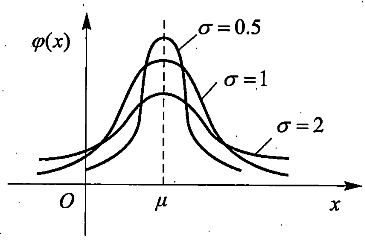


图 2-4

人们已编制了$\Phi(x)$的函数表（见附表 2），可供查用. 附表 2 只给出了$x>0$的$\Phi(x)$值，由于标准正态分布的概率密度函数$\varphi(x)$关于纵轴对称，所以

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)\,. \tag{2-8}$$

式（2-8）表明，即使x取负值，通过查附表 2 也可计算得到$\Phi(x)$的值. 当$\xi\sim N(0,1)$时，有

$$P\{x_1\leqslant\xi<x_2\}=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)\,. \tag{2-9}$$

对于正态分布，有如下重要结论.

定理 如果$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则其分布函数$F_\xi(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

证明 $$F_\xi(x)=P\{\xi<x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t\xlongequal{v=\frac{t-\mu}{\sigma}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v$$
$$=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

提 示

正态分布在概率统计中占有重要地位. 实际问题中确实有大量随机变量，如测量、射击及机械制造误差等，都服从正态分布.

例 3　设 $\xi \sim N(0,1)$，求：

（1）$P\{2<\xi<3\}$；

（2）$P\{-1<\xi<1\}$.

解　（1）$P\{2<\xi<3\}=\Phi(3)-\Phi(2)\approx 0.9987-0.9772=0.0215$.

（2）$P\{-1<\xi<1\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=\Phi(1)-[1-\Phi(1)]=2\Phi(1)-1$

$$\approx 2\times 0.8413-1=0.6826.$$

例 4　设 $\xi \sim N(3,0.5^2)$，求：

（1）$P\{2.5<\xi<3.75\}$；

（2）$P\{\xi>2\}$.

解　（1）$P\{2.5<\xi<3.75\}=\Phi\left(\dfrac{3.75-3}{0.5}\right)-\Phi\left(\dfrac{2.5-3}{0.5}\right)=\Phi(1.5)-\Phi(-1)$

$$=\Phi(1.5)+\Phi(1)-1\approx 0.9332+0.8413-1=0.7745.$$

（2）$P\{\xi>2\}=1-P\{\xi\leqslant 2\}=1-\Phi\left(\dfrac{2-3}{0.5}\right)=1-\Phi(-2)$

$$=1-[1-\Phi(2)]=\Phi(2)\approx 0.9772.$$

例 5　设 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $P\{|\xi-\mu|\leqslant k\sigma\}$，其中 $k=1,2,3$.

解　当 $k=1$ 时，$P\{|\xi-\mu|\leqslant\sigma\}=P\left\{\left|\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}\right|\leqslant 1\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1\approx 0.6826$，

当 $k=2$ 时，$P\{|\xi-\mu|\leqslant 2\sigma\}=P\left\{\left|\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}\right|\leqslant 2\right\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1\approx 0.9544$，

当 $k=3$ 时，$P\{|\xi-\mu|\leqslant 3\sigma\}=P\left\{\left|\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}\right|\leqslant 3\right\}=\Phi(3)-\Phi(-3)=2\Phi(3)-1\approx 0.9774$.

注意

例 5 中计算结果 $P\{|\xi-\mu|\leqslant 3\sigma\}\approx 0.9774$ 表明，对服从参数为 μ,σ 的正态分布的随机变量来说，落入区间 $[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 内的概率为 0.977 4，即它的值落入区间 $[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 几乎肯定发生，这就是所谓的“3σ”原则.

3. 指数分布

若连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases} \tag{2-10}$$

其中，λ 是大于零的常数，则称 ξ 服从参数为 λ 的**指数分布**，记作 $\xi\sim E(\lambda)$.

例 6 设某种电子管的使用寿命 ξ（单位：h）服从参数为 $\lambda=0.000\,2$ 的指数分布，求该产品的使用寿命超过 3 000 h 的概率.

解 所求概率为

$$P\{\xi>3\,000\}=\int_{3\,000}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

这里 $\varphi(x)$ 是 $\lambda=0.000\,2$ 的指数分布的概率密度，其计算公式为

$$\varphi(x)=\begin{cases}0.000\,2e^{-0.000\,2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

于是

$$P\{\xi>3\,000\}=\int_{3\,000}^{+\infty}0.000\,2e^{-0.000\,2x}\mathrm{d}x=e^{-0.6}\approx 0.548\,8.$$

提 示

指数分布在实际中也有重要的应用，它一般可以作为各种“寿命”分布的近似，也可以作为某个特定事件发生所需等待时间的分布．如电子元件的寿命、轮胎的寿命、电话的通话时间等，都可以认为服从指数分布．

2.4.3 连续型随机变量分布函数的求法

设连续型随机变量 ξ 的概率密度为 $\varphi(x)$，则 ξ 的分布函数为

$$F(x)=P\{\xi<x\}=P\{-\infty<\xi<x\}=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

即 ξ 的分布函数 $F(x)$ 是概率密度 $\varphi(x)$ 在区间 $(-\infty,x)$ 上的广义积分．由于 $\varphi(x)=F'(x)$，故 $\varphi(x)$ 是 $F(x)$ 的导函数，$F(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的原函数．因此，若已知连续型随机变量的分布函数或概率密度中的任意一个，便可求另一个．

例 7 求服从区间 $(a,b]$ 上均匀分布的随机变量 ξ 的分布函数 $F(x)$.

解 因 ξ 服从均匀分布，故 ξ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x \leqslant a$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}x=0\text{；}$$

当 $a<x\leqslant b$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a}0\mathrm{d}x+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{x-a}{b-a}\text{；}$$

当 $x>b$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a}0\mathrm{d}x+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x+\int_{b}^{x}0\mathrm{d}x=1\,.$$

故所求随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\leqslant b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

它的图形为一连续曲线，如图 2-5 所示.

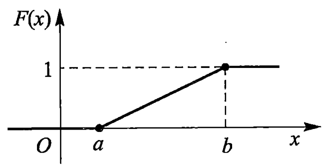


图 2-5

例 8　设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x$，试求常数 A,B 及 $P\{\xi>1\}$.

解　由 $F(x)$ 是分布函数得

$$\begin{cases}F(-\infty)=A-\dfrac{\pi}{2}B=0,\\ F(+\infty)=A+\dfrac{\pi}{2}B=1,\end{cases}$$

解得 $A=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{\pi}$，即

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x\,,$$

从而

$$P\{\xi>1\}=1-P\{\xi\leqslant 1\}=1-F(1)=\frac{1}{4}.$$

2.5 随机变量函数的分布律

在一些情况下，需要由已知的随机变量ξ的分布去确定ξ的函数$\eta=f(\xi)$的分布．这里$f(x)$是一个连续或分段连续的一元实函数，则$\eta=f(\xi)$是一个新的随机变量，当ξ取值为x时，η取值为$y=f(x)$．

2.5.1 离散型随机变量函数的概率分布

一般地，设ξ的概率分布如表 2-7 所示．若η的取值$y_i=f(x_i)$全不相等，则η的概率分布如表 2-8 所示．若$f(x_i)$中有相等的，则应把那些相等的值分别合并起来，对应的概率p_i也相加，就得到η的概率分布．

表 2-7

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
$P\{\xi=x_i\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

表 2-8

η	$y_1=f(x_1)$	$y_2=f(x_2)$	$\cdots$	$y_n=f(x_n)$	$\cdots$
$P\{\eta=y_i\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

例 1 设随机变量ξ的分布律如表 2-9 所示．求：

（1）$\eta=2\xi+1$的分布律；（2）$\eta=(\xi-2)^2$的分布律．

表 2-9

ξ	0	1	2	3	4	5
$P\{\xi=x_i\}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

解 依题意得表 2-10．

表 2-10

ξ	0	1	2	3	4	5
$\eta=2\xi+1$	1	3	5	7	9	11
$\eta=(\xi-2)^2$	4	1	0	1	4	9

（1） $\eta=2\xi+1$ 的分布律如表 2-11 所示.

表 2-11

$\eta=2\xi+1$	1	3	5	7	9	11
$P\{\eta=y_i\}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

（2） $\eta=(\xi-2)^2$ 的分布律如表 2-12 所示.

表 2-12

$\eta=(\xi-2)^2$	0	1	4	9
$P\{\eta=y_i\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$

2.5.2　连续型随机变量函数的概率密度

连续型随机变量函数是通过给出其概率密度的方式来描述概率分布. 设连续型随机变量 ξ 的密度函数为 $\varphi_\xi(x)$，ξ 的函数 $\eta=f(\xi)$ 的密度函数为 $\varphi_\eta(y)$. 若 $f'(x)>0$，即 $y=f(x)$ 是单调递增函数，则

$$\varphi_\eta(y)=\varphi_\xi[g(y)]\cdot g'(y),$$

其中，$x=g(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. 若 $f'(x)<0$，即 $y=f(x)$ 是单调递减函数，则

$$\varphi_\eta(y)=-\varphi_\xi[g(y)]\cdot g'(y).$$

以上两式合并得

$$\varphi_\eta(y)=\varphi_\xi[g(y)]\cdot|g'(y)|. \tag{2-11}$$

例 2　设随机变量 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $\eta=\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}$ 的概率密度.

解　因为 $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma}>0$，反函数为 $x=\sigma y+\mu$，又由于

$$\varphi_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ (-\infty<x<+\infty),$$

所以，由式（2-11）可得

$$\varphi_\eta(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(\sigma y+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}}\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\ (-\infty<x<+\infty).$$

提示

由例 2 可知，若$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\eta = \dfrac{\xi-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

例 3 对圆片直径进行测量，其值在$[5,6]$上均匀分布，求圆片面积的概率密度.

解 设x为直径，则圆片面积为

$$y = f(x) = \frac{\pi}{4}x^2, \ f'(x) = \frac{\pi}{2}x > 0.$$

直径的概率密度为

$$\varphi_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6-5}, & 5 \leqslant x \leqslant 6, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$f(x)$的反函数为

$$x = g(y) = \sqrt{\frac{4}{\pi}y}, \ g'(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}}.$$

由式（2-11）得圆片面积的概率密度

$$\varphi_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}, & \dfrac{25\pi}{4} \leqslant y \leqslant 9\pi, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

提示

当条件$f'(x)>0$或$f'(x)<0$不满足时，即$f(x)$不是单调函数时，不能用式(2-11). 此时要先求分布函数$F_\eta(y)$，再求导得到密度函数$\varphi_\eta(y)$.

例 4 设随机变量$\xi \sim N(0,1)$，求$\eta = \xi^2$的概率密度.

解 函数$y = x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数，先求η的分布函数

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{\xi^2 < y\}.$$

当$y \leqslant 0$时，因$\{\xi^2 < y\}$为不可能事件，故$F_\eta(y) = P\{\xi^2 < y\} = 0$.

当$y > 0$时，因$\xi \sim N(0,1)$，故

$$F_\eta(y) = P\{\xi^2 < y\} = P\{-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

再求导，便得到η的概率密度

$$\varphi_\eta(y)=F'(y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}\left(\sqrt{y}\right)'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}.$$

综上所述，$\eta=\xi^2$ 的概率密度为

$$\varphi_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

习题 2

1．从一批产品中每次随机抽出一个产品进行检验，检查后放回．设 $\xi_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 次取产品，记“$\xi_i=1$”表示取到合格品，“$\xi_i=0$”表示取到次品．试描述：

（1）三次都取到合格品；

（2）三次中至少有一次取到合格品；

（3）三次中恰有两次取到合格品；

（4）三次中最多有一次取到合格品．

2．假设 $F(x)$，$F_1(x)$，$F_2(x)$ 均为分布函数，且 $F(x)=\frac{3}{5}F_1(x)-bF_2(x)$，求 b．

3．设随机变量 ξ 的分布为 $P\{\xi=k\}=\lambda p^k\ (0<p<1,k=1,2,\cdots)$，求 λ．

4．将一颗骰子抛掷 2 次（或同时掷 2 颗骰子），用 ξ 表示出现点数之和，求 ξ 的分布律．

5．设一袋中有 6 个球，依次标有数字：-1，2，2，2，3，3．现从中任取一球，则取得的球上标有的数字 ξ 是一随机变量，求 ξ 的分布函数．

6．从装有 4 个黑球，8 个白球和 2 个黄球的箱中，随机抽取 2 个球，假定每取出一个黑球得 2 分，每取出一个白球失 1 分，每取出一个黄球不得分也不失分，以 ξ 表示得到的分数，求 ξ 的概率分布．

7．据信有 20%的美国人没有任何健康保险，现任意抽查 15 个美国人，以 ξ 表示 15 个人中无任何健康保险的人数（设各人是否有健康保险相互独立）．问 ξ 服从什么分布？写出分布律，并求下列情况下无任何健康保险的概率（1）恰有 3 人；（2）至少有 2 人；（3）不少于 1 人且不多于 3 人；（4）多于 5 人．

8．一本 500 页的书，共有 500 个错字，每个错字可能出现在每一页上，试求在指定一页上至少有三个错字的概率．

9．为保证设备的正常工作，需要配备适量的维修人员，设共有 300 台设备，每台设备的工作相互独立，发生故障的概率都是 0.01，若在通常的情况下，一台设备的故障可以由一个人来处理，问至少应配备多少维修人员，才能保证当设备发生故障时不能及时维修的概率小于 0.01？

10．随机变量 ξ 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求：

（1）常数 C；（2）ξ 的分布函数．

11．修理某机器所需时间（单位：h）服从为参数 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 的指数分布，试问：

（1）修理时间超过 2 h 的概率是多少？

（2）若已持续修理了 9 h，总共需要至少 10 h 才能修好的条件概率是多少？

12．已知随机变量 $\xi\sim N(3,2^2)$，求：

（1）$P\{2<\xi\leqslant 5\}$；（2）$P\{-4<\xi\leqslant 10\}$；（3）$P\{|\xi|>2\}$；

（4）$P\{|\xi|<3\}$；（5）确定 C 值，使 $P\{\xi\geqslant C\}=P\{\xi<C\}$ 成立．

13．某元件寿命 ξ 服从参数为 $\lambda=\dfrac{1}{1\,000}$ 的指数分布，3 个这样的元件使用 1 000 h 后，都没有损坏的概率是多少？

14．某厂生产的电子管寿命 ξ（单位：h）服从 $N(1\,600,\sigma^2)$，若电子管寿命在 1 200 小时以上的概率不小于 0.96，求 σ 的值．

15．随机变量 $\xi\sim U(0,5)$，问 $4x^2+4\xi x+\xi+2=0$ 的两根均为实数的概率是多少？

16．设随机变量 ξ 的分布律如表 2-13 所示．求：

（1）$\eta=1-\xi$ 的分布律；（2）$\eta=\xi^2$ 的分布律．

表 2-13

ξ	-2	-1	0	1	2
P	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

P.2020 04.23

17．设 $\xi\sim N(0,1)$，试求：（1）$\eta=e^{\xi}$ 的概率密度；（2）$\eta=|\xi|$ 的概率密度．

18．设随机变量 ξ 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}2x, & x\in(0,1),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求 $\eta=e^{-\xi}$ 的概率密度．

19．某人的一串钥匙上有 n 把钥匙，其中只有一把能打开自己的家门，他随意地试用这串钥匙中的某一把去开门，若每把钥匙试开一次后除去，求打开门时试开次数 ξ 的分

布律.

20. 设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)=\dfrac{A}{1+\mathrm{e}^{-x}}$，求：(1) 常数 A；(2) ξ 的概率密度；(3) $P\{\xi\leqslant 0\}$.

21. 某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩（百分制）近似服从于正态分布 $N(72,\sigma^2)$，96 分以上占考生 2.3%，试求考生的外语成绩在 60～84 分之间的概率.

22. 设随机变量 ξ 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求 $\eta=\sin\xi$ 的概率密度.

第 3 章　多维随机变量及其分布

在第 2 章，我们主要讨论了一维随机变量及其分布问题．但在实际问题中，有许多随机试验的结果，仅用一个随机变量是无法表示出来的．例如，某人向平面靶射击，弹着点的确切位置就涉及两个随机变量，即弹着点离靶心的水平和垂直方向上的有向距离 X 和 Y；飞机在空中飞行时的位置是一个三维空间中的点，需要三个随机变量 X,Y,Z 来确定．研究这些随机试验，需要引入多维随机变量的概念．因此，本章将重点讨论二维随机变量及其分布，对于三维及更多维的随机变量可依此类推．

3.1　二维随机变量及其分布函数

3.1.1　二维随机变量的概念

定义 1　设随机试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，$X=X\{\omega\}$ 和 $Y=Y\{\omega\}$ 均为定义在 Ω 上的随机变量，则由它们构成的向量 (X,Y) 称为**二维随机变量**（或**二维随机向量**），如图 3-1 所示．

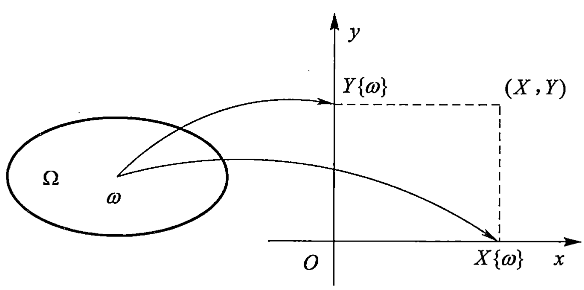


图 3-1

沿用一维随机变量的研究思路，我们先考虑二维随机变量的分布函数，再研究离散型随机变量的分布律，进而研究二维连续型随机变量的概率密度，最后再考虑随机变量的独立性和随机变量函数的分布．

3.1.2　联合分布函数

定义 2　设 (X,Y) 是一个二维随机变量，对于任意的 x，y，称定义在整个实平面上的二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\leqslant x)\cap(Y\leqslant y)\}=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\} \tag{3-1}$$

为二维随机变量 (X,Y) 的**联合分布函数**，简称**分布函数**.

如果将二维随机变量 (X,Y) 视为 xOy 平面上随机点的坐标，那么分布函数 $F(x,y)$ 在点 (x,y) 处的函数值就是随机点 (X,Y) 落在以点 (x,y) 为顶点且位于该点左下方的无界矩形域（如图 3-2 所示）内的概率.

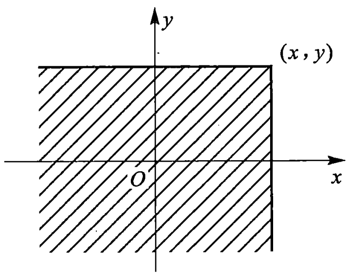


图 3-2

二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$ 具有下列性质.

性质 1（单调性）　$F(x,y)$ 分别是变量 x 和变量 y 的单调不减函数.

性质 2（规范性）　$0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，且

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\y\to-\infty}}F(x,y)=0,\quad F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}F(x,y)=1. \tag{3-2}$$

对于任意固定的 x，有

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,$$

对于任意固定的 y，有

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0.$$

性质 3（右连续性）　$F(x,y)$ 关于 x 右连续，关于 y 也右连续，即

$$F(x+0,y)=F(x,y),\quad F(x,y+0)=F(x,y). \tag{3-3}$$

性质 4　对于任意 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$x_1<x_2$，$y_1<y_2$，有

$$P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geqslant 0. \tag{3-4}$$

注意

如果一个二元函数具有上述四个性质，则该函数一定可以作为某个二维随机变量 (X,Y) 的分布函数.

3.1.3 边缘分布函数

二维随机变量 (X,Y) 作为一个整体，具有分布函数 $F(x,y)$. 由于 X 和 Y 都是随机变量，所以各自也具有分布函数. 我们把 X 的分布函数 $F_X(x)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 关于 X 的**边缘分布函数**；把 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 关于 Y 的**边缘分布函数**.

边缘分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 可以由 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$ 来确定，事实上

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x, Y<+\infty\}=F(x,+\infty),$$

即

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y). \tag{3-5}$$

类似地，有

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y). \tag{3-6}$$

例 已知二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=A(B+\arctan x)(C+\arctan y)\ (-\infty<x,y<+\infty),$$

试确定常数 A,B,C，并求关于 X 和 Y 的边缘分布函数.

解 由二维随机变量的分布函数的性质得

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}A(B+\arctan x)(C+\arctan y)=A\left(B+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(C+\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\\ \lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}A(B+\arctan x)(C+\arctan y)=A\left(B-\dfrac{\pi}{2}\right)(C+\arctan y)=0,\\ \lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=\lim\limits_{y\to-\infty}A(B+\arctan x)(C+\arctan y)=A(B+\arctan x)\left(C-\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\end{cases}$$

解得

$$A=\frac{1}{\pi^2}, B=\frac{\pi}{2}, C=\frac{\pi}{2},$$

于是，(X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right).$$

因此，两个边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right),$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right).$$

3.2 二维离散型随机变量

3.2.1 二维离散型随机变量的概念与分布律

定义 1 若二维随机变量 (X,Y) 所有可能取的值为有限对或可列无限多对，则称 (X,Y) 为**二维离散型随机变量**.

显然，当且仅当 X 和 Y 都是离散型随机变量时，(X,Y) 才是二维离散型随机变量.

定义 2 设二维离散型随机变量 (X,Y) 所有可能取的值为 (x_i,y_j) $(i,j=1,2,\cdots)$，且

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}, \tag{3-7}$$

则称式（3-7）为二维离散型随机变量 (X,Y) 的**联合分布律**，简称为**分布律**.

(X,Y) 的分布律具有下列性质：

（1）$p_{ij}\geqslant 0\,(i,j=1,2,\cdots)$； （3-8）

（2）$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$. （3-9）

二维随机变量 (X,Y) 的分布律也可用表格来表示，如表 3-1 所示.

表 3-1

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

例 1 箱子中装有 10 件产品，其中 4 件是次品，6 件是正品，不放回地从箱子中任取产品两次，每次一个．定义随机变量

$$X=\begin{cases}0, & \text{第一次取到的是次品,}\\ 1, & \text{第一次取到的是正品,}\end{cases}\quad Y=\begin{cases}0, & \text{第二次取到的是次品,}\\ 1, & \text{第二次取到的是正品,}\end{cases}$$

求 (X,Y) 的分布律和分布函数．

解 依题意得

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\mid X=0\}=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\mid X=0\}=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{4}{15},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\mid X=1\}=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3},$$

所以，(X,Y) 的分布律如表 3-2 所示．

表 3-2

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$

由二维随机变量的分布函数的定义可知，(X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ \dfrac{2}{15}, & 0\leqslant x<1, 0\leqslant y<1,\\ \dfrac{2}{5}, & 0\leqslant x<1, y\geqslant 1 \text{ 或 } x\geqslant 1, 0\leqslant y<1,\\ 1, & x\geqslant 1, y\geqslant 1.\end{cases}$$

3.2.2 二维离散型随机变量的边缘分布律

设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律如式（3-7）所示，则称

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}\ (i=1,2,\cdots) \tag{3-10}$$

为二维随机变量 (X,Y) 关于 X 的**边缘分布律**.

类似地，二维随机变量 (X,Y) 关于 Y 的边缘分布律为

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}\ (j=1,2,\cdots). \tag{3-11}$$

二维随机变量 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律也可以放在联合分布表中，如表 3-3 所示.

表 3-3

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X=x_i\}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{\infty}p_{1j}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{\infty}p_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P\{Y=y_j\}$	$\sum_{i=1}^{\infty}p_{i1}$	$\sum_{i=1}^{\infty}p_{i2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}$	$\cdots$	1

例 2　已知 (X,Y) 的分布律如表 3-4 所示，求 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

表 3-4

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

解　由题意得

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5},$$

$$P\{X=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5},$$

$$P\{Y=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5}.$$

因此，(X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律如表 3-5 所示.

表 3-5

X	0	1	Y	0	1
$p_{i\cdot}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$p_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

3.3 二维连续型随机变量

3.3.1 二维连续型随机变量的概念与概率密度

定义 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，如果存在非负函数 $f(x,y)$，使得对于任意的实数 x,y 都有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s, \tag{3-12}$$

则称 (X,Y) 为**二维连续型随机变量**，并称非负函数 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的**联合概率密度**，或简称**概率密度**.

根据定义，$f(x,y)$ 具有下列性质.

性质 1 $f(x,y)\geqslant 0$.

性质 2 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$. （3-13）

性质 3 设 D 为 xOy 平面上的一个区域，则点 (X,Y) 落在 D 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3-14}$$

性质 4 如果 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，则有

$$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y). \tag{3-15}$$

注 意

在几何上，性质 1 和性质 2 表明：概率密度所代表的曲面位于 xOy 平面的上方，并且介于它和 xOy 平面的空间区域的体积为 1. 性质 3 表明：随机点 (X,Y) 落在平面区域 D 内的概率 $P\{(X,Y)\in D\}$ 等于以 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

还需要指出的是，满足性质 1 和 2 的二元函数 $f(x,y)$ 一定能作为某二维随机变量 (X,Y) 的概率密度.

例 1　已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cxy, & 0<x<1, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：（1）常数 c 的值；（2）$P\{X\leqslant Y\}$；（3）求 $F(x,y)$.

解　（1）由

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1 cxy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\int_0^1 x\left[\int_0^1 y\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=c\int_0^1\frac{1}{2}x\mathrm{d}x=\frac{c}{4}=1$$

得 $c=4$.

（2）记 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1, 0<y<1\}$，$G=\{(x,y)\mid x\leqslant y\}$（如图 3-3 所示），因 $f(x,y)$ 仅在区域 $D\cap G=\{(x,y)\mid 0<x<1, x\leqslant y<1\}$ 内取非零值，由性质 3 得

$$P\{X\leqslant Y\}=\iint\limits_{x\leqslant y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D\cap G} 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_x^1 y\mathrm{d}y=4\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

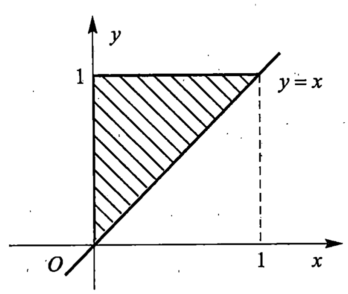


图 3-3

（3）由二维随机变量的分布函数的定义可知，$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$.

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$；

当 $0\leqslant x<1, 0\leqslant y<1$ 时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_0^x\left[\int_0^y 4st\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s=\int_0^x 2y^2 s\mathrm{d}s=x^2y^2;$$

当 $0\leqslant x<1,y\geqslant 1$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^x\left[\int_0^1 4st\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s=\int_0^x 2s\mathrm{d}s=x^2\text{；}$$

当 $x\geqslant 1,0\leqslant y<1$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^1\left[\int_0^y 4st\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s=\int_0^1 2y^2s\mathrm{d}s=y^2\text{；}$$

当 $x\geqslant 1,y\geqslant 1$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^1\left[\int_0^1 4st\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s=\int_0^1 2s\mathrm{d}s=1.$$

因此，

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{ 或 }y<0,\\ x^2y^2, & 0\leqslant x<1,0\leqslant y<1,\\ x^2, & 0\leqslant x<1,y\geqslant 1,\\ y^2, & x\geqslant 1,0\leqslant y<1,\\ 1, & x\geqslant 1,y\geqslant 1.\end{cases}$$

3.3.2 二维连续型随机变量的边缘概率密度

设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，因为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^x\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(s,t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s,$$

所以，X 是一个连续型随机变量，其概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\text{；}\tag{3-16}$$

同理，Y 也是一个连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x.\tag{3-17}$$

$f_X(x),f_Y(y)$ 分别称为二维随机变量 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的**边缘概率密度**.

例 2　已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度.

解　(X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty} 12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

即

$$f_X(x)=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{+\infty} 12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

即

$$f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

3.3.3　二维均匀分布与二维正态分布

1. 二维均匀分布

设 G 为 xOy 平面上的有界区域，其面积为 S_G，二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_G}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{3-18}$$

则称 (X,Y) 服从区域 G 上的**均匀分布**.

若 (X,Y) 在区域 G 上服从均匀分布，则对于任一平面区域 D，有

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D\cap G}\frac{1}{S_G}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{S_G}\iint\limits_{D\cap G}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{S_{D\cap G}}{S_G},$$

其中 $S_{D\cap G}$ 为平面区域 D 与 G 的公共部分的面积．特别地，对于 G 内任何子区域 D，有

$$P\{(X,Y)\in D\}=\frac{S_D}{S_G}.$$

其中，S_D 为区域 D 的面积．这表明 (X,Y) 落在 G 内任意子区域 D 内的概率与 D 的面积成正比，而与 D 的形状及位置无关．这恰好与平面上的几何概型相吻合，即若在平面有

界区域G内任取一点，用(X,Y)表示该点的坐标，则(X,Y)服从区域G上二维均匀分布.

例 3 设G为曲线$y=x^2$与$y=\sqrt{x}$围成的平面图形区域（如图 3-4 所示），二维随机变量(X,Y)在G上服从均匀分布，求：

（1）$P\{X>Y\}$；

（2）(X,Y)关于X和关于Y的边缘概率密度.

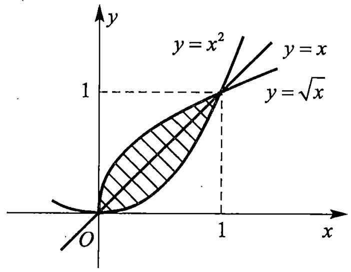


图 3-4

解 由题意得区域G的面积为

$$S_G=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3},$$

则(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$$

（1）设$D=\{(x,y)\mid x>y\}$，则

$$P\{X>Y\}=P\{(X,Y)\in D\}=\frac{S_{D\cap G}}{S_G}=\frac{1/6}{1/3}=\frac{1}{2}.$$

（2）(X,Y)关于X的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

即

$$f_X(x)=\begin{cases}3(\sqrt{x}-x^2), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(X,Y)关于Y的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{y^2}^{\sqrt{y}}3\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

即

$$f_Y(y)=\begin{cases}3(\sqrt{y}-y^2), & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

提 示

例 3 中二维均匀分布随机变量 (X,Y) 的两个边缘分布都不再是均匀分布. 读者可以计算一下矩形区域 $G=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 上二维均匀分布随机变量 (X,Y) 的两个边缘分布，并与例 3 的结果相对照.

2. 二维正态分布

如果二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty), \tag{3-19}$$

其中，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数，且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$，则称 (X,Y) 为服从参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的**二维正态分布**，记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

例 4　设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)\right\}\ (-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty),$$

求 $P\{(X,Y)\in G\}$，其中 $G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sigma^2\}$.

解　由题意得

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\sigma^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sigma}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\}r\mathrm{d}r=-\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\}\Bigg|_0^{\sigma}=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

3.4 条件分布与随机变量的独立性

3.4.1 离散型随机变量的条件分布律

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots),$$

则 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律分别为

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}(i=1,2,\cdots),$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}(j=1,2,\cdots).$$

对于固定的 j，若 $p_{\cdot j}>0$，则在事件 $\{Y=y_j\}$ 已经发生的条件下事件 $\{X=x_i\}$ 发生的概率为

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\ (i=1,2,\cdots), \tag{3-20}$$

式（3-20）称为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的**条件分布律**.

由上述定义可知：

（1）$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}\geqslant 0$；

（2）$\sum\limits_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=\frac{1}{p_{\cdot j}}\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ij}=\frac{p_{\cdot j}}{p_{\cdot j}}=1$.

同理，对于固定的 i，若 $p_{i\cdot}>0$，则在事件 $\{X=x_i\}$ 已经发生的条件下事件 $\{Y=y_j\}$ 发生的概率为

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\ (j=1,2,\cdots), \tag{3-21}$$

式（3-21）称为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的**条件分布律**.

例 1 已知 (X,Y) 的分布律如表 3-6 所示，求：（1）在 $Y=0$ 的条件下 X 的条件分布律；（2）在 $X=1$ 的条件下 Y 的条件分布律.

表 3-6

Y / X	0	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	0

解　由题意可得 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律，如表 3-7 所示.

表 3-7

X	0	1	Y	0	1
$p_{i\cdot}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	$p_{\cdot j}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$

（1）在 $Y=0$ 的条件下 X 的条件分布律为

$$P\{X=0\mid Y=0\}=\frac{P\{X=0,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\frac{1/2}{7/8}=\frac{4}{7},$$

$$P\{X=1\mid Y=0\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\frac{3/8}{7/8}=\frac{3}{7},$$

如表 3-8 所示.

表 3-8

X	0	1
$P\{X\mid Y=0\}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

（2）在 $X=1$ 的条件下 Y 的条件分布律为

$$P\{Y=0\mid X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{3/8}{3/8}=1,$$

$$P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{0}{3/8}=0,$$

如表 3-9 所示.

表 3-9

Y	0	1
$P\{Y\mid X=1\}$	1	0

3.4.2 连续型随机变量的条件概率密度

设(X,Y)为二维连续型随机变量，其相应的分布函数和概率密度分别为$F(x,y)$和$f(x,y)$.

对于给定实数y及任意给定的正数ε，有$P\{y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}>0$，如果对于任意实数$x$，极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}P\{X\leqslant x\mid y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{P\{X\leqslant x,y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}}$$

存在，则称此极限值为在$Y=y$条件下X的**条件分布函数**，记为$F_{X|Y}(x\mid y)$.

设二维连续型随机变量(X,Y)的分布函数和概率密度分别为$F(x,y)$和$f(x,y)$，如果$f(x,y)$在点(x,y)处连续，边缘概率密度$f_Y(y)>0$，则有

$$F_{X|Y}(x\mid y)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{P\{X\leqslant x,y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)}{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y-\varepsilon)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\dfrac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y)}{\varepsilon}+\dfrac{F(x,y-\varepsilon)-F(x,y)}{\varepsilon}}{\dfrac{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y)}{\varepsilon}+\dfrac{F_Y(y-\varepsilon)-F_Y(y)}{\varepsilon}}=\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)}.$$

因此

$$F_{X|Y}(x\mid y)=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x}{f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x,$$

称$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在$Y=y$条件下X的**条件概率密度**，记为$f_{X|Y}(x\mid y)$，即

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}. \tag{3-22}$$

类似地，可以定义在$X=x$条件下Y的条件分布函数$F_{Y|X}(y\mid x)$和Y的条件概率密度，即

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}. \tag{3-23}$$

例2 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$f_{X|Y}(x\mid y),f_{Y|X}(y\mid x)$及$P\{Y>1\mid X=3\}$.

解　由于

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

则

$$f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

由于

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}x, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

则

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(y+1)^2}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

当 $y>0$ 时，有

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{x\mathrm{e}^{-x(1+y)}}{\dfrac{1}{(y+1)^2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

即

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}x(y+1)^2\mathrm{e}^{-x(1+y)}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

当 $x>0$ 时，有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{x\mathrm{e}^{-x(1+y)}}{\mathrm{e}^{-x}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

即

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-xy}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

当 $X=3$ 时，有

$$P\{Y>1 \mid X=3\}=\int_{1}^{+\infty} f_{Y|X}(y \mid 3) \mathrm{d} y=\int_{1}^{+\infty} 3 \mathrm{e}^{-3 y} \mathrm{d} y=\mathrm{e}^{-3} .$$

3.4.3 随机变量的独立性

一般来说，二维随机变量(X,Y)中的两个随机变量X和Y之间存在相互联系，因而一个随机变量的取值可能会影响到另一个随机变量取值的概率．例如，对给定的x和y，若$P\{Y\leqslant y\}>0$，那么在$\{Y\leqslant y\}$条件下$\{X\leqslant x\}$的概率，即$P\{X\leqslant x\mid Y\leqslant y\}$，与$P\{X\leqslant x\}$一般是不相等的．如果这两个概率相等，即

$$P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x\mid Y\leqslant y\},$$

则说明事件$\{Y\leqslant y\}$的发生不影响事件$\{X\leqslant x\}$发生的概率，此时

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x\mid Y\leqslant y\}=\frac{P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}}{P\{Y\leqslant y\}}=\frac{F(x,y)}{F_Y(y)}.$$

定义　设二维随机变量(X,Y)的分布函数以及关于X和关于Y的边缘分布函数分别为$F(x,y)$，$F_X(x)$和$F_Y(y)$．如果对于任意实数x和y，都有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y), \tag{3-24}$$

则称随机变量Y和Y**相互独立**.

如果(X,Y)是二维离散型随机变量，其分布律和边缘分布律分别为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots),$$
$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}\ (i=1,2,\cdots),$$
$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}\ (j=1,2,\cdots),$$

则随机变量X和Y相互独立的充分必要条件为：对于(X,Y)所有可能取的值(x_i,y_j)，都有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}\ (i,j=1,2,\cdots), \tag{3-25}$$

即对i,j的所有取值都有

$$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}\ .$$

如果(X,Y)是二维连续型随机变量，其概率密度和边缘概率密度分别为$f(x,y)$，$f_X(x)$和$f_Y(y)$，则X和Y相互独立的充分必要条件为：对于任意实数x,y，都有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y). \tag{3-26}$$

例 3　设二维随机变量(X,Y)的分布律如表 3-10 所示．求(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布律，并判断X和Y是否相互独立.

表 3-10

Y \ X	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

解　(X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律如表 3-11 所示.

表 3-11

X	0	1	Y	0	1
$p_{i\cdot}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$p_{\cdot j}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

由于

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{4},\quad P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{64},$$

所以

$$P\{X=0,Y=0\}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\},$$

即 X 和 Y 不是相互独立的.

例 4　已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<x<1,0<y<x,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

判断 X 和 Y 是否相互独立.

解　(X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 24(1-x)y\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

即

$$f_X(x)=\begin{cases}12(1-x)x^2, & 0<x<1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 24(1-x)y\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

即

$$f_Y(y)=\begin{cases}12y(y^2-2y+1), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然有

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y),$$

即 X 和 Y 不是相互独立的.

例 5　设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

（1）求 X 和 Y 的联合概率密度；

（2）设含有 a 的二次方程 $a^2+2Xa+Y=0$，求 a 有实根的概率.

解　（1）依题意得

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

因此，X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}, & 0<x<1,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）若 a 有实根，则 $(2X)^2-4Y\geqslant 0$，记 $D=\{(x,y)\mid x^2\geqslant y\}$，则

$$P\{(x,y)\mid x^2\geqslant y\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}\mathrm{d}y=\int_0^1(-\mathrm{e}^{-y/2})\Big|_0^{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-\mathrm{e}^{-x^2/2})\mathrm{d}x$$

$$=1-\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x=1-\sqrt{2\pi}(\varPhi(1)-\varPhi(0))\approx 0.1445.$$

3.5　*n* 维随机变量

二维随机变量的一些概念可推广到 n 维随机变量.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是定义在样本空间 Ω 上的 n 个随机变量，则称 n 维向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 **n 维随机变量或 n 维随机向量**.

（1）对于任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，若设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n\},$$

则它有与二维随机变量分布函数相类似的性质.

（2）如果 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 所有可能取的值是有限或可列无限个 n 元数组，则称之为 **n 维离散型随机变量**，其分布律为

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = p_{i_1 i_2 \cdots i_n} (i_1, i_2, \cdots i_n = 1, 2, \cdots, n).$$

（3）如果存在非负 n 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使得对于任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，都有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(s_1, s_2, \cdots, s_n)\mathrm{d}s_n \cdots \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1,$$

则称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 **n 维连续型随机变量**，并称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**概率密度**或 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的**联合概率密度**.

（4）如果已知 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则可确定 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的 $k\ (1 \leqslant k \leqslant n)$ 维边缘分布函数. 在 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中保留相应的 k 个变量，而让其他变量趋向 $+\infty$，其极限即为所求.

例如，n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 X_1 的边缘分布函数为

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty, \cdots, +\infty),$$

而 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 (X_1, X_2, X_3) 的边缘分布函数为

$$F_{X_1 X_2 X_3}(x_1, x_2, x_3) = F(x_1, x_2, x_3, +\infty, \cdots, +\infty).$$

若 n 维离散型随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布律为

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = p_{i_1 i_2 \cdots i_n} (i_1, i_2, \cdots, i_n = 1, 2, \cdots, n),$$

则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 X_1 的边缘分布律为

$$P\{X_1 = x_1\} = \sum_{i_2=1}^{\infty}\sum_{i_3=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_n=1}^{\infty} p_{i_1 i_2 \cdots i_n}.$$

若 n 维连续型随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 X_1 的边缘概率密度为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

而 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 关于 (X_1,X_2,X_3) 的边缘概率密度为

$$f_{X_1X_2X_3}(x_1,x_2,x_3)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_5\cdots\mathrm{d}x_n.$$

（5）如果对于任意 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，都有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)\cdot\cdots\cdot F_{X_n}(x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(x_i),$$

则称随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ **相互独立**.

若 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 n 维离散型随机变量，则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立的充分必要条件是：对于任意一组可能值 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}$，都有

$$P\{X_1=x_{i_1},X_2=x_{i_2},\cdots,X_n=x_{i_n}\}=P\{X_1=x_{i_1}\}P\{X_2=x_{i_2}\}\cdots P\{X_n=x_{i_n}\}=\prod_{j=1}^{n}P\{X_j=x_{i_j}\}.$$

若 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 n 维连续型随机变量，则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立的充分必要条件是：对于任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，都有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_i).$$

（6）如果对于任意 $m+n$ 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n$，有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)=F_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)F_2(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

其中，F,F_1,F_2 分别是 $m+n$ 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$、$m$ 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 n 维随机变量 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 的分布函数，则称 m 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 n 维随机变量 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ **相互独立**.

以下结论在数理统计中是很有用的.

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立，则 $X_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 和 $Y_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 相互独立．又若 h,g 是连续函数，则 $h(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 $g(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立.

3.6　二维随机变量函数的分布

在实际问题中，有些随机变量往往是两个或者两个以上随机变量的函数．例如，考虑全国年龄在 40 岁以上的人群，用 X 和 Y 分别表示一个人的年龄和体重，Z 表示这个人的血压，并且已知 Z 与 X，Y 的函数关系式为 $Z=g(X,Y)$，现在希望通过 (X,Y) 的分布来确定 Z 的分布．此类问题就是我们将要讨论的二维随机变量函数的分布问题.

3.6.1　二维离散型随机变量函数的分布

设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，其分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots)$，则二维随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=\sum_{i,j:g(x_i,y_j)=z_k} P\{X=x_i,Y=y_j\}\ (k=1,2,\cdots). \tag{3-27}$$

例 1　设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim B\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$，$Y\sim B\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$. 求：（1）$X+Y$ 的分布律；（2）XY 的分布律.

解　依题意，X 和 Y 的分布律如表 3-12 所示.

表 3-12

X	0	1	Y	0	1	2
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

（1）由于

$$P\{X+Y=0\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16},$$

$$\begin{aligned}P\{X+Y=1\}&=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}\\&=P\{X=0\}P\{Y=1\}+P\{X=1\}P\{Y=0\}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{16},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{X+Y=2\}&=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=1\}\\&=P\{X=0\}P\{Y=2\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16},\end{aligned}$$

$$P\{X+Y=3\}=P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16},$$

因此，$X+Y$ 的分布律如表 3-13 所示.

表 3-13

$X+Y$	0	1	2	3
P	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$

（2）同理，XY 的分布律如表 3-14 所示.

表 3-14

XY	0	1	2
P	$\frac{13}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

例 2 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$，证明：$X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

证明 由于

$$P\{X=i\}=\frac{\lambda_1^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\ (i=0,1,2,\cdots),\quad P\{Y=j\}=\frac{\lambda_2^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}\ (j=0,1,2,\cdots),$$

$X+Y$ 所有可能取的值为 $0,1,2,\cdots$，且 X 和 Y 相互独立，则对任意非负整数 k 有

$$P\{X+Y=k\}=P\left\{\bigcup_{l=0}^{k}(X=l,Y=k-l)\right\}=\sum_{l=0}^{k}P\{X=l\}P\{Y=k-l\}$$

$$=\sum_{l=0}^{k}\left[\frac{\lambda_1^l\mathrm{e}^{-\lambda_1}}{l!}\cdot\frac{\lambda_2^{k-l}\mathrm{e}^{-\lambda_2}}{(k-l)!}\right]=\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}\lambda_1^l\cdot\lambda_2^{k-l}\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}\lambda_1^l\cdot\lambda_2^{k-l}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\ (k=0,1,2,\cdots),$$

即 $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

3.6.2 二维连续型随机变量函数的分布

设 (X,Y) 为二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$. 为了求二维随机变量 (X,Y) 的函数 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度，我们可以通过分布函数的定义，先求出 Z 的分布函数 $F_Z(z)$，再利用性质 $f_Z(z)=F_Z'(z)$ 求得 Z 的概率密度 $f_Z(z)$. 下面讨论两个典型的二维连续型随机变量函数的分布.

1. $Z=X+Y$ 的分布

设 (X,Y) 为二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$，我们来求随机变量 X 和 Y 的和函数 $Z=X+Y$ 的概率密度.

首先求 $Z=X+Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$，由分布函数的定义得

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

如图 3-5 所示.

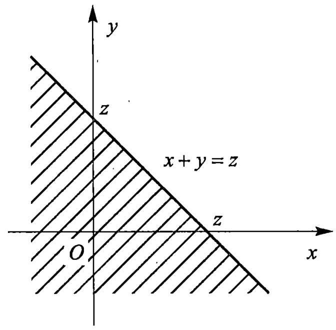


图 3-5

固定 z 和 x，对积分 $\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\mathrm{d}y$ 作变量代换，令 $y=u-x$，得到

$$\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{z} f(x, u-x)\mathrm{d}u,$$

于是

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(x, u-x)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u.$$

因此，由概率密度的定义知随机变量 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x, \tag{3-28}$$

同理

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\mathrm{d}y. \tag{3-29}$$

特别地，如果 X 和 Y 相互独立，$f_X(x), f_Y(y)$ 分别为二维随机变量 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x, \tag{3-30}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y, \tag{3-31}$$

式（3-30）和式（3-31）称为**卷积公式**，记作 $f_X * f_Y$.

例 3　设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解　由均匀分布的定义可得

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他},\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由卷积公式得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f_X(z-y)\mathrm{d}y,$$

令 $z-y=t$，则上式变为

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z}f_X(t)\mathrm{d}t\ (-\infty<z<+\infty).$$

由于 $f_X(x)$ 在 $(0,1)$ 内的值为 1，在其余点的值为 0，所以有以下几种情况：

当 $z<0$ 时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z}0\mathrm{d}t=0$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z}f_X(t)\mathrm{d}t=\int_{z-1}^{0}0\mathrm{d}t+\int_0^z 1\mathrm{d}t=z$；

当 $1\leqslant z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z}f_X(t)\mathrm{d}t=\int_{z-1}^{1}1\mathrm{d}t+\int_1^z 0\mathrm{d}t=2-z$；

当 $z\geqslant 2$ 时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z}f_X(t)\mathrm{d}t=\int_{z-1}^{z}0\mathrm{d}t=0$.

综上所述，随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0\leqslant z<1,\\ 2-z, & 1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 4 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，它们都服从 $N(0,1)$ 分布，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ (-\infty<x<+\infty),\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\ (-\infty<y<+\infty),$$

又 X 与 Y 相互独立，故由卷积公式可得 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\mathrm{d}x.$$

令 $t=\sqrt{2}\left(x-\dfrac{z}{2}\right)$，则

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}},$$

即 Z 服从正态分布 $N(0,2)$.

注 意

一般地，若 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则随机变量 $Z = X + Y$ 亦服从正态分布，且 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$．这一性质称为**正态分布的可加性**．更一般地，若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)(i = 1, 2, \cdots, n)$，且它们相互独立，则它们的和 $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 仍然服从正态分布，且有

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2),$$

即有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布．

2. $U = \max(X, Y)$ 及 $V = \min(X, Y)$ 的分布

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$．令 $U = \max(X, Y)$，$V = \min(X, Y)$，记 U 的分布函数为 $F_{\max}(u)$，V 的分布函数为 $F_{\min}(v)$，其中 $-\infty < u < +\infty$，$-\infty < v < +\infty$．下面来求 $U = \max(X, Y)$ 和 $V = \min(X, Y)$ 的分布函数．

对于任意实数 u，都有 $\{U \leqslant u\} = \{X \leqslant u, Y \leqslant u\}$，且 X 和 Y 相互独立，因此得到 $U = \max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(u) = P\{U \leqslant u\} = P\{X \leqslant u, Y \leqslant u\} = P\{X \leqslant u\}P\{Y \leqslant u\} = F_X(u)F_Y(u),$$

即

$$F_{\max}(u) = F_X(u)F_Y(u). \tag{3-32}$$

类似地，可以得到 $V = \min(X, Y)$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_{\min}(v) &= P\{V \leqslant v\} = 1 - P\{V > v\} = 1 - P\{X > v\}P\{Y > v\} \\ &= 1 - [1 - P\{X \leqslant v\}][1 - P\{Y \leqslant v\}] = 1 - [1 - F_X(v)][1 - F_Y(v)], \end{aligned}$$

即

$$F_{\min}(v) = 1 - [1 - F_X(v)][1 - F_Y(v)]. \tag{3-33}$$

以上结果可推广到 n 个相互独立的随机变量．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $U = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 和 $V = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数分别为

$$F_{\max}(u) = F_{X_1}(u)F_{X_2}(u)\cdots F_{X_n}(u), \tag{3-34}$$

$$F_{\min}(v) = 1 - [1 - F_{X_1}(v)][1 - F_{X_2}(v)]\cdots[1 - F_{X_n}(v)]. \tag{3-35}$$

特别地，当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且有相同的分布函数 $F(x)$ 时，有

$$F_{\max}(u) = [F(x)]^n, \tag{3-36}$$

$$F_{\min}(v) = 1 - [1 - F(v)]^n. \tag{3-37}$$

例 5 假设一电路装有三个同类电器元件，其工作状态相互独立，且无故障工作时间

都服从参数为$\lambda>0$的指数分布．当三个元件都无故障时，电路正常工作，否则整个电路不能正常工作．试求电路正常工作的时间T的概率分布函数．

解 以$X_i\ (i=1,2,3)$表示第i个电器元件无故障工作的时间，则X_1,X_2,X_3相互独立且同分布，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

依题意，电路正常工作的时间$T=\min(X_1,X_2,X_3)$，设$G(t)$为工作时间T的分布函数．

当$t\leqslant 0$时，T的分布函数为

$$G(t)=0.$$

当$t>0$时，T的分布函数

$$G(t)=P\{T\leqslant t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{\min(X_1,X_2,X_3)>t\},$$

又由于X_1,X_2,X_3相互独立，所以

$$\begin{aligned}G(t)&=1-P\{X_1>t,X_2>t,X_3>t\}=1-P\{X_1>t\}P\{X_2>t\}P\{X_3>t\}\\&=1-[1-F(t)]^3=1-e^{-3\lambda t}.\end{aligned}$$

综上所述，T的分布函数为

$$G(t)=\begin{cases}1-e^{-3\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

即电路正常工作的时间T服从参数为3λ的指数分布．

习题 3

1．设袋中有 4 个球，分别标有数字$1,2,2,3$．从袋中任取一球（其数字记为X）之后不再放回，再从袋中任取一球（其数字记为Y），求(X,Y)的联合分布律．

2．把一枚均匀硬币抛掷三次，设X为三次抛掷中正面出现的次数，而Y为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值，求(X,Y)的概率分布．

3．设随机变量(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}ce^{-2(x+y)}, & 0\leqslant x<+\infty,0\leqslant y<+\infty,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

试求：（1）常数c；（2）(X,Y)的分布函数$F(x,y)$；（3）$P\{X+Y\leqslant 1\}$．

4．设G表示抛物线$y=x^2$及直线$y=x$所包围的区域，(X,Y)服从G上的均匀分布，求联合概率密度．

5．设随机变量(X,Y)在G上服从均匀分布，其中G由x轴、y轴及直线$y=2x+1$所

围成．试求：（1）(X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$；（2）(X,Y) 关于 X,Y 的边缘概率密度．

6. 设随机变量 X 在 $(0,a)$ 上随机地取值，服从均匀分布，当观察到 $X=x\,(0<x<a)$ 时，Y 在区间 (x,a) 内任一子区间上取值的概率与子区间的长度成正比．试求：（1）(X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)$；（2）(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$．

7. 设随机变量 X 在 1，2，3，4 四个整数中等可能地取值，而随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一个整数．求：（1）$X=2$ 时，Y 的条件分布律；（2）$Y=1$ 时，X 的条件分布律．

8. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（1）求 $f_{Y|X}(y|x)$；（2）求 $f_{X|Y}(x|y)$；（3）说明 X 与 Y 的独立性．

9. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}c, & |y|<-x,-1<x<0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求参数 c 与条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$，$f_{X|Y}(x|y)$．

10. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求：

（1）(X,Y) 关于 X,Y 的边缘密度函数；（2）当 $X=1/3$ 时，Y 的条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x=1/3)$；（3）$P\{X+Y\leqslant 1\}$．

11. 设随机变量 (X,Y) 的分布律如表 3-15 所示．

表 3-15

X \ Y	1	2	3
1	c	1/9	a
2	1/3	b	1/9

（1）a，b，c 为何值时 X 与 Y 相互独立？

（2）写出 (X,Y) 的边缘分布律．

12. 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}Cy(1-x), & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求常数 C，并判断 X,Y 是否独立．

13．设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y), & 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 判断 X,Y 是否独立.

14．随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 与 Y 的分布律相同，X 的分布律如表 3-16 所示.

表 3-16

X	0	1	2
P	1/6	1/3	1/2

（1）求 $Z=X+Y$ 的分布律；

（2）求 $U=\max(X,Y)$ 的分布律；

（3）求 $V=\min(X,Y)$ 的分布律.

2[illegible]

数学二只[illegible]

第 4 章　随机变量的数字特征

第 2 章和第 3 章介绍了随机变量的分布函数、概率密度和分布律，它们都能完整地描述随机变量，但是在某些实际或理论问题中，人们感兴趣的往往只是能够描述随机变量某一种特征的常数．例如，一支足球队队员的球龄是随机变量，但观众关注的往往只是他们的平均年龄；一个白领一年十二个月的收入是一个随机变量，但人们往往只关注其月平均收入；检查一批棉花的质量，既要考虑棉花纤维的平均长度，又要考虑纤维长度与平均长度的偏离程度，平均长度越大，偏离程度越小，质量越好．这种由随机变量的分布所确定的，能刻画随机变量某一方面特征的常数称为**数字特征**，它在概率论与数理统计中起着重要的作用．本章将介绍几个重要的数字特征：数学期望、方差、矩以及两个随机变量的协方差和相关系数．

4.1　数学期望

4.1.1　数学期望的概念

我们在解决实际问题时，常常需要求出某一个随机变量的平均值．那么，如何确定随机变量的平均值呢？先看下面的例子．

例 1　某服装公司生产两种套装，一种是大众装，每套 200 元，生产 900 套，另一种是高档装，每套 1 800 元，生产 100 套，问该公司生产套装的平均价格是多少？

解　显然套装的平均价格绝对不是两种套装 200 元和 1 800 元的算术平均，而是以每种套装的套数与生产总套数的比值（取到这些值的频率）为权重的加权平均，即

$$\text{平均价格}=\frac{200\times 900+1\,800\times 100}{900+100}=200\times\frac{900}{1\,000}+1\,800\times\frac{100}{1\,000}=200\times 0.9+1\,800\times 0.1=360\,.$$

从上例可以看出，对于一个离散型随机变量 X，其可能取的值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$．若将这 n 个数相加后除以 n 作为“均值”是不对的，因为 X 取各个值的频率是不同的，频率越大的取值，出现的机会就越大，即计算取值的平均值时其权数就越大．如果用概率替换频率，用取值的概率作为一种“权数”做加权计算平均值是十分合理的．

通过以上分析，我们可以给出离散型随机变量的数学期望的一般定义．

1. 离散型随机变量的数学期望

定义 1 设 X 是一个离散型随机变量，其分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k\ (k=1,2,\cdots)$，若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$ 绝对收敛，则称此级数之和为随机变量 X 的**数学期望**，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k\,. \tag{4-1}$$

数学期望简称**期望**或**均值**.

一维离散随机变量数学期望的定义可以推广到多维随机变量，如设二维离散随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots),$$

则其数学期望为

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_{i\cdot}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij}\,, \tag{4-2}$$

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{\cdot j}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}y_i p_{ij}\,. \tag{4-3}$$

例 2 甲、乙两人在相同条件下进行射击，击中的环数分别记为 X 和 Y，其概率分布如下：

$$P\{X=8\}=0.3,P\{X=9\}=0.1,P\{X=10\}=0.6;$$

$$P\{Y=8\}=0.2,P\{Y=9\}=0.5,P\{Y=10\}=0.3.$$

试比较甲、乙两人谁的成绩好.

解 依题意得

$$E(X)=8\times0.3+9\times0.1+10\times0.6=9.3,$$

$$E(Y)=8\times0.2+9\times0.5+10\times0.3=9.1,$$

即可知 $E(X)>E(Y)$，故甲的成绩比乙好.

例 3 设随机变量 $X\sim B(n,p)$，求 $E(X)$.

解 因为

$$p_k=P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,\cdots,n),$$

所以

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}kp_k=\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]!}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$=np[p+(1-p)]^{n-1}=np\,.$$

例 4　设随机变量 $X \sim P(\lambda)$，求 $E(X)$.

解　因为 $X \sim P(\lambda)$，有

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\ (k=0,1,2,\cdots),$$

所以

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda .$$

2. 连续型随机变量的数学期望

类似地，我们可以给出连续型随机变量的数学期望的定义，只要把离散型随机变量分布律中的概率 p_k 改为概率密度 $f(x)$，将求和改为求积分即可．因此，我们有下面的定义.

定义 2　设 X 为一连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$，若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 的值为连续型随机变量 X 的**数学期望**，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx . \tag{4-4}$$

一维连续随机变量数学期望的定义可以推广到多维随机变量，如设二维连续随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则其数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy , \tag{4-5}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy , \tag{4-6}$$

例 5　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求 $E(X)$.

解　依题意得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3} .$$

例 6　设随机变量 X 服从区间 (a,b) 上的均匀分布，求 $E(X)$.

解　依题意，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

因此

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b=\frac{a+b}{2}.$$

例 7 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，求 $E(X)$.

解 依题意，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

因此

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=0-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}.$$

例 8 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求 $E(X)$.

解 依题意，X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ (-\infty<x<+\infty),$$

因此

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x,$$

令$t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，则

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\mu.$$

4.1.2 随机变量函数的数学期望

定理 设随机变量 Y 是随机变量 X 的函数，即 $Y=g(X)$（其中 g 为一元连续函数）.

（1）若 X 是离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k\ (k=1,2,\cdots),$$

则当无穷级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$ 绝对收敛时，随机变量 Y 的数学期望为

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k\ . \tag{4-7}$$

（2）若 X 是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$，则当广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+1) f(x) dx$$

对收敛时，随机变量Y的数学期望为

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x\ . \tag{4-8}$$

提　示

定理的重要意义在于：求随机变量$Y=g(X)$的数学期望时，只需利用X的分布律或概率密度就可以了，无需再求Y的分布律或概率密度，这为我们计算随机变量函数的数学期望提供了极大的方便.

上述定理还可以推广到两个或两个以上随机变量函数的情况.

设二维离散随机变量(X,Y)的分布律为$P(X=x_i,Y=y_j)$ $(i=1,2,\cdots,\ j=1,2,\cdots)$，$g(x,y)$是实值连续函数，且级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$绝对收敛，则随机变量函数$g(X,Y)$的数学期望为

$$E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}\ . \tag{4-9}$$

设连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，$g(x,y)$是实值连续函数，且积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$绝对收敛，则随机变量函数$g(X,Y)$的数学期望为

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ . \tag{4-10}$$

例 9　随机变量$X\sim N(0,1)$，求随机变量函数$Y=X^2$的数学期望.

解　依题意可得

$$E(Y)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=1.$$

例 10　国际市场每年对我国某种商品的需求量是随机变量X（单位：吨），它服从$[2\,000,4\,000]$上的均匀分布. 已知每售出 1 吨商品，可挣得外汇 3 万元；若商品无法售出而积压，则每吨商品需花费库存费等共 1 万元，问需要组织多少货源，才能使国家收益最大？

解　设组织货源t吨，$t\in[2\,000,4\,000]$，收益为随机变量Y（单位：万元），由题意可知Y是需求量X的函数，即

$$Y=g(X)=\begin{cases}3X-(t-X), & X<t,\\ 3t, & X\geqslant t.\end{cases}$$

整理得

$$Y=g(X)=\begin{cases}4X-t, & X<t,\\ 3t, & X\geqslant t.\end{cases}$$

X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\,000}, & 2\,000\leqslant x\leqslant 4\,000,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由式（4-8）得

$$\begin{aligned}E(Y)=E[g(X)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\,000}\left[\int_{2\,000}^{t}(4x-t)\mathrm{d}x+\int_{t}^{4\,000}3t\mathrm{d}x\right]\\ &=\frac{1}{1\,000}(-t^2+7\,000t-4\,000\,000).\end{aligned}$$

令 $[E(Y)]'=0$，得

$$\frac{1}{1\,000}(-2t+7\,000)=0,$$

解得 $t=3\,500$.

因此，组织 3 500 吨货源可使收益最大.

4.1.3 数学期望的性质

设 C 为常数，随机变量 X,Y 的数学期望都存在，则数学期望具有以下性质.

性质 1 $E(C)=C$.

性质 2 $E(CX)=CE(X)$.

性质 3 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

这一性质可推广到有限个随机变量的情况，即 $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)$.

性质 4 如果随机变量 X 和 Y 相互独立，则

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

例 11 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且各自的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

求 $E(XY)$ 和 $E(3X-4Y)$.

解　由性质 4 得

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x \times \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{0}^{+\infty} 3x\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x \times \int_{0}^{+\infty} 4y\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

由性质 2 和性质 3 得

$$E(3X-4Y)=3E(X)-4E(Y)=3\times\frac{1}{3}-4\times\frac{1}{4}=0.$$

4.2　方　差

4.2.1　方差的概念和计算公式

在实际问题中，仅凭数学期望来反映随机变量的分布特征仍有很大的局限性. 先来看一个例子：某工厂甲、乙两个车间生产同一个产品各 50 件，这些产品送检测机构检测后，每件产品按质量高低打 0 分到 10 分. 若两个车间产品的平均得分相同且都是 7 分，但甲车间产品的分数全部在 6 分到 8 分之间，而乙车间产品的分数比较分散，在 2 分到 10 分之间. 从产品的总体质量来看，显然甲车间产品比乙车间产品好，这是因为甲车间产品的分数与平均分（数学期望）之间偏离较小，其产品质量比较稳定.

下面我们就来讨论如何用一个数字特征来衡量一个随机变量与其数学期望值的偏离程度，这个偏离程度通常用方差来表示.

定义 1　设 X 是一个随机变量，如果 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，则称之为 X 的**方差**，记为 $D(X)$，即

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}. \tag{4-11}$$

在实际应用中，还引用 $\sqrt{D(X)}$，记作 $\sigma(X)$，称为**标准差**或**均方差**.

由定义可知，$D(X)$ 描述了随机变量 X 与其数学期望 $E(X)$ 的偏离程度. $D(X)$ 越小，说明 X 的取值越集中；反之，$D(X)$ 越大，说明 X 的取值越分散. $\sqrt{D(X)}$ 同样也描述了随机变量 X 的偏离程度.

如果 X 是离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k\ (k=1,2,\cdots),$$

则有

Z_2

求X均值 与X区分

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k .$$

如果 X 是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$，则有

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x .$$

根据数学期望的性质，可得

$$\begin{aligned}D(X)&=E\{[X-E(X)]^2\}=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}\\&=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2,\end{aligned}$$

即

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2, \tag{4-12}$$

这就是计算随机变量方差常用的公式.

例 1 设随机变量 X 服从（0-1）分布（如表 4-1 所示），求 $D(X)$.

表 4-1

X	0	1
P	$1-p$	p

解 因为

$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p,$$

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p,$$

所以

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p).$$

例 2 设离散型随机变量 X 的分布律如表 4-2 所示，求 $D(X)$.

表 4-2

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.3	0.4	0.2

解 因为

$$E(X)=(-1)\times0.1+0\times0.3+1\times0.4+2\times0.2=0.7,$$

$$E(X^2)=(-1)^2\times0.1+0^2\times0.3+1^2\times0.4+2^2\times0.2=1.3,$$

所以

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1.3-0.7^2=0.81.$$

例 3 设随机变量 $X\sim B(n,p)$，求 $D(X)$.

解 $E(X)=np$，令 $q=1-p$，则

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^kp^kq^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}[k(k-1)+k]\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}\\&=\sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-1)!(n-k)!}p^2p^{k-2}q^{(n-2)-(k-2)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^kq^{n-k}\\&=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}p^{k-2}q^{(n-2)-(k-2)}+E(X)\\&=n(n-1)p^2+np,\end{aligned}$$

所以

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np(1-p).$$

例 4　设随机变量 $X\sim P(\lambda)$，求 $D(X)$.

解　因为

$$E(X)=\lambda,$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}[(k-1)+1]\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^2\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda^2+\lambda,$$

所以

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=(\lambda^2+\lambda)-\lambda^2=\lambda.$$

例 5　设随机变量 $X\sim U(a,b)$，求 $D(X)$.

解　因为

$$E(X)=\frac{a+b}{2},\quad E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2),$$

所以

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{12}(b-a)^2.$$

例 6　设随机变量 $X\sim E(\lambda)$，求 $D(X)$.

解　由题意得

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\lambda x}dx\\&=-\frac{2}{\lambda}\left(xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx\right)=-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2}{\lambda^2},\end{aligned}$$

因此

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

例 7　设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $D(X)$.

解　由于

$$E(X)=\mu,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

令$\frac{x-\mu}{\sigma}=t$，则

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=\sigma^2.$$

提 示

对于$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，参数μ,σ^2分别是X的数学期望和方差，因而正态分布完全可以由它的数学期望和方差确定.

为了便于记忆和比较，下面给出常用随机变量分布的数学期望和方差，如表4-3所示.

表 4-3

名称与记号	分布律或概率密度	数学期望	方差
(0-1) 分布	$P\{\xi=k\}=p^k(1-p)^{1-k}\ (k=0,1,0<p<1)$	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n,p)$	$P\{\xi=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}\ (0<p<1,q=1-p,k=0,1,2,\cdots,n)$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\ (k=0,1,2,\cdots,\lambda>0)$	λ	λ
均匀分布 $U[a,b]$	$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & 其他.\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\ (\lambda>0),\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ (x\in\mathbf{R},\mu\in\mathbf{R},\sigma>0)$	μ	σ^2

4.2.2 方差的性质

假设以下讨论的方差均存在，则随机变量的方差具有以下性质.

性质 1 设C为常数，则$D(C)=0$.

证明 $D(C)=E\{[C-E(C)]^2\}=E[(C-C)^2]=E(0)=0$.

性质 2　设 C 为常数，则 $D(CX)=C^2D(X)$.

证明　$D(CX)=E\{[CX-E(CX)]^2\}=C^2E\{[X-E(X)]^2\}=C^2D(X)$.

性质 3　设 C 为常数，则 $D(X+C)=D(X)$.

证明　
$$\begin{aligned}D(X+C)&=E\{[(X+C)-E(X+C)]^2\}=E\{[X+C-E(X)-C]^2\}\\&=E\{[X-E(X)]^2\}=D(X).\end{aligned}$$

性质 4　如果随机变量 X,Y 相互独立，则
$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

例 8　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立并且服从同一分布，若
$$E(X_1)=\mu,D(X_1)=\sigma^2,$$
记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，证明：$E(\overline{X})=\mu,D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$.

证明　由数学期望的性质得
$$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\mu,$$
又由独立性和方差的性质可知
$$D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=n\sigma^2,$$
于是
$$E(\overline{X})=\mu,\quad D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}.$$

提示

若用 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 表示对物体重量的 n 次重复测量的误差，而 σ^2 为误差大小的度量，公式 $D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$ 表明 n 次重复测量的平均误差是单次测量误差的 $1/n$，也就是说，重复测量的平均精度要比单次测量的精度高.

4.2.3　原点矩与中心矩

为了更好地描述随机变量的特征，除了前面介绍过的数学期望、方差，最后我们介绍一种在理论和应用中都起到重要作用的数字特征——矩.

定义 2　设 X 是一个随机变量，如果 $E(X^k)$ 存在，则称之为随机变量 X 的 k **阶原点矩**，简称 k **阶矩**，记作 μ_k，即

$$\mu_k = E(X^k)\ (k=1,2,\cdots). \tag{4-13}$$

定义 3　设 X 是一个随机变量，如果 $E\{[X-E(X)]^k\}$ 存在，则称之为随机变量 X 的 k **阶中心矩**，记作 ν_k，即

$$\nu_k = E\{[X-E(X)]^k\}\ (k=1,2,\cdots). \tag{4-14}$$

显然，随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 是 X 的**一阶原点矩**，方差 $D(X)$ 是 X 的**二阶中心矩**.

4.3　协方差与相关系数

对于二维随机变量 (X,Y)，它们的期望与方差仅能描述自身的某些特征，而关于 X 与 Y 之间的相互关系并未提供任何信息. 为此，我们引入协方差和相关系数来反映两个随机变量之间的联系.

4.3.1　协方差

定义 1　设随机变量 X 与 Y 的数学期望 $E(X)$ 和 $E(Y)$ 都存在，如果随机变量 $[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 的数学期望存在，则称之为随机变量 X 和 Y 的**协方差**，记作 $\mathrm{cov}(X,Y)$，即

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}. \tag{4-15}$$

利用数学期望的性质，容易得到协方差的另一计算公式

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \tag{4-16}$$

协方差具有如下性质.

性质 1　$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$.

性质 2　$\mathrm{cov}(X,X) = D(X)$.

性质 3　$\mathrm{cov}(aX,bY) = ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$，其中 a,b 为常数.

性质 4　$\mathrm{cov}(X+Y,Z) = \mathrm{cov}(X,Z) + \mathrm{cov}(Y,Z)$.

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X+Y,Z) &= E[(X+Y)Z] - E(X+Y)E(Z)\\ &= E(XZ)+E(YZ)-E(X)E(Z)-E(Y)E(Z)\\ &= [E(XZ)-E(X)E(Z)]+[E(YZ)-E(Y)E(Z)]\\ &= \mathrm{cov}(X,Z)+\mathrm{cov}(Y,Z).\end{aligned}$$

由此可得计算方差的一般公式

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y), \tag{4-17}$$

或一般地，设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为任意常数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为随机变量，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 D(X_i)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j \operatorname{cov}(X_i, X_j). \tag{4-18}$$

例 1　n 个人将自己的帽子放在一起，充分混合后每人随机地取出一顶，求选中自己帽子的人数的均值和方差.

解　令 X 表示选中自己帽子的人数，设

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 人选中自己的帽子},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中，$i=1,2,\cdots,n$，则有

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n.$$

易知

$$P\{X_i=1\}=\frac{1}{n}, P\{X_i=0\}=\frac{n-1}{n},$$

所以

$$E(X_i)=\frac{1}{n}, D(X_i)=\frac{n-1}{n^2},$$

因此

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=1.$$

注意到

$$X_iX_j=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 人与第 } j \text{ 人都选中自己的帽子},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中，$i\neq j$，于是

$$E(X_iX_j)=P\{X_i=1, X_j=1\}=P\{X_i=1\}P\{X_j=1 \mid X_i=1\}=\frac{1}{n(n-1)},$$

则

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2(n-1)},$$

因此

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)+2\sum_{i<j}\operatorname{cov}(X_i, X_j)=\frac{n-1}{n}+2\mathrm{C}_n^2\frac{1}{n^2(n-1)}=1.$$

引入协方差的目的在于度量随机变量之间关系的强弱，但由于协方差有量纲，其数值受 X 和 Y 本身量纲的影响，为了克服这一缺点，我们对随机变量进行标准化.

$X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 为随机变量 X 的**标准化随机变量**，不难验证 $E(X^*)=0$，$D(X^*)=1$. 例如，$X\sim N(\mu,\sigma^2)\,(\sigma>0)$，由于 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，则有 $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

X 和 Y 的标准化随机变量的协方差为

$$\operatorname{cov}(X^*,Y^*)=E(X^*Y^*)-E(X^*)E(Y^*)=E(X^*Y^*)=E\left[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\cdot\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right]$$

$$=\frac{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}.$$

上式表明，可以利用标准差对协方差进行修正，从而得到一个能更好地度量随机变量之间关系强弱的数字特征——相关系数.

4.3.2 相关系数

协方差在一定程度上反映了随机变量 X 与 Y 的联系，若 X 与 Y 同时扩大 c 倍，即 $X_1=cX$，$Y_1=cY$，这时 X_1,Y_1 的相互关系与 X,Y 的相互关系应该没有发生改变，但事实上协方差却扩大了 c^2 倍，这是因为 $\operatorname{cov}(X_1,Y_1)=\operatorname{cov}(cX,cY)=c^2\operatorname{cov}(X,Y)$. 为了更加准确地反映 X 与 Y 的相互联系，在计算 X 与 Y 的协方差之前，我们先将 X 与 Y 标准化，下面给出相关系数的定义.

定义 2 设随机变量 X 和 Y 的数学期望和方差都存在，且方差不为零，则称 $\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为随机变量 X 和 Y 的**相关系数**，记作 ρ_{XY}，即

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}. \tag{4-19}$$

如果 $\rho_{XY}=0$，则称 X 和 Y **不相关**；如果 $\rho_{XY}>0$，则称 X 和 Y **正相关**，特别地，如果 $\rho_{XY}=1$，则称 X 和 Y **完全正相关**；如果 $\rho_{XY}<0$，则称 X 和 Y **负相关**，特别地，如果 $\rho_{XY}=-1$，则称 X 和 Y **完全负相关**.

X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY} 有如下性质.

性质 1 $|\rho_{XY}|\leqslant 1$.

证明　事实上，由柯西—许瓦兹不等式得

$$[\mathrm{cov}(X,Y)]^2=\{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}\}^2$$
$$\leqslant E\{[X-E(X)]^2\}E\{[Y-E(Y)]\}^2=D(X)D(Y),$$

即

$$|\mathrm{cov}(X,Y)|\leqslant\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)},$$

因此，

$$|\rho_{XY}|=\left|\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\right|\leqslant 1.$$

提示

> 定理（柯西—许瓦兹不等式）　若 (X,Y) 为二维随机变量，且 $E(X^2)$ 和 $E(Y^2)$ 均存在，则 $[E(XY)]^2\leqslant E(X^2)E(Y^2)$.

性质 2　$|\rho_{XY}|=1$ 的充分必要条件是：存在常数 a,b 使得

$$P\{Y=aX+b\}=1. \tag{4-20}$$

由此可见，相关系数定量地刻画了 X 和 Y 的相关程度：$|\rho_{XY}|$ 越大，X 和 Y 的相关程度越大，$\rho_{XY}=0$ 时相关程度最低．需要说明的是：X 和 Y 相关的含义是指 X 和 Y 存在某种程度的线性关系，因此，若 X 和 Y 不相关，只能说明 X 与 Y 之间不存在线性关系，但并不排除 X 和 Y 之间存在其他关系．

对于随机变量 X 与 Y，下列表述是等价的：

（1）$\mathrm{cov}(X,Y)=0$；

（2）X 和 Y 不相关；

（3）$E(XY)=E(X)E(Y)$；

（4）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$．

例 2　设 θ 是 $[-\pi,\pi]$ 上均匀分布的随机变量，又

$$X=\sin\theta,Y=\cos\theta,$$

求 X 与 Y 之间的相关系数．

解　由于

$$E(X)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0,$$

$$E(Y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=0,$$

$$E(XY)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x\mathrm{d}x=0,$$

因此

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,$$

于是

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0.$$

注意

例 2 中 X 与 Y 是不相关的，但显然有 $X^2+Y^2=1$. 也就是说，虽然 X 与 Y 没有线性关系，但有另外一种函数关系，即 X 与 Y 不是相互独立的. 综上所述，当 $\rho_{XY}=0$ 时，X 与 Y 可能独立，也可能不独立.

4.4 切比雪夫不等式及大数定律

我们知道，随机事件在某次试验中可能发生也可能不发生，但在大量的重复试验中随机事件的发生呈现出明显的规律性. 例如，人们通过大量试验认识到随机事件的频率具有稳定性这一客观规律. 实际上，大量随机现象的结果均具有稳定性，大数定律以严格的数学形式阐述了这种稳定性，揭示了随机现象的偶然性与必然性之间的内在联系. 下面，我们先来介绍证明大数定律的重要工具——切比雪夫（Chebyshev）不等式.

4.4.1 切比雪夫不等式

定理 1 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在，则对于任意 $\varepsilon>0$，有

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2},\tag{4-21}$$

式（4-21）称为**切比雪夫不等式**，它的等价形式为

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geqslant1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.\tag{4-22}$$

从切比雪夫不等式可以看出：随机变量 X 与 $E(X)$ 的距离大于等于 ε 的概率不超过 $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$；当方差越小时，事件 $\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}$ 发生的概率就越小，即随机变量 X 的取值就越集中在 $E(X)$ 附近. 可见，方差确实是描述随机变量取值集中程度的一个量.

在随机变量 X 分布未知的情况下，可以利用切比雪夫不等式对随机事件 $\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$ 的概率进行估计. 例如，当 $\varepsilon=3\sqrt{D(X)}$ 时，有

$$P\{|X-E(X)|<3\sqrt{D(X)}\}\geqslant\frac{8}{9}\approx 0.888\,9.$$

也就是说，随机变量 X 落在以 $E(X)$ 为中心，以 $3\sqrt{D(X)}$ 为半径的邻域内的概率很大，而落在该邻域之外的概率很小．当 $\sqrt{D(X)}$ 较小时，随机变量 X 的取值就越集中在 $E(X)$ 附近，而这正是方差这个数字特征的意义所在．

例 1　校学生会主办一次迎新晚会，向在校教师发出 150 张邀请函，按以往经验，接到邀请函的教师中大体能有 80%可到会，试用切比雪夫不等式估计前来参加晚会的教师人数在 110 到 130 之间的概率．

解　设前来参加晚会的教师人数为 X，依题意可知 $X\sim B(150,0.8)$，则

$$E(X)=np=150\times 0.8=120,\quad D(X)=np(1-p)=150\times 0.8\times(1-0.8)=24.$$

由切比雪夫不等式得

$$P\{110<X<130\}=P\{|X-120|<10\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{10^2}=1-\frac{24}{100}=0.76,$$

即前来参加晚会的教师的人数在 110 到 130 之间的概率不小于 0.76．

例 2　设某电站供电网有 10 000 盏电灯，夜晚每一盏灯开灯的概率都是 0.7，并且每一盏灯开、关时间彼此独立，试用切比雪夫不等式估计夜晚同时开灯的盏数在 6 800 至 7 200 之间的概率．

解　令 X 表示夜晚同时开灯的盏数，则 $X\sim B(n,p)$，其中，$n=10\,000$，$p=0.7$，所以

$$E(X)=np=10\,000\times 0.7=7\,000,\quad D(X)=np(1-p)=2\,100.$$

由切比雪夫不等式得

$$P\{6\,800<X<7\,200\}=P\{|X-7\,000|<200\}\geqslant 1-\frac{2\,100}{200^2}=0.947\,5.$$

注意

例 2 中，如果用二项分布直接计算，这个概率近似为 0.999 99．可见，切比雪夫不等式估计的精确度不高，但切比雪夫不等式在理论上具有重大意义，它是证明大数定律的重要工具．

4.4.2　依概率收敛

在微积分中，收敛性和极限是一个基本而重要的概念．数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 是指对任意 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

在概率论中，我们研究的对象是随机变量，要考虑随机变量序列的收敛性．如果我们

按定义数列收敛性的方式来定义随机变量序列的收敛性，那么，随机变量序列$\{X_n\}(n\geqslant 1)$收敛于一个随机变量X是指对任意$\varepsilon>0$，总存在正整数N，当$n>N$时，恒有

$$|X_n-X|<\varepsilon .$$

但由于X_n,X均为随机变量，于是$|X_n-X|$也是随机变量，要求一个随机变量取值小于足够小的ε是较为苛刻的，而且对有关概率论问题的进一步研究意义并不大．为此，我们需要对上述定义进行修正，以适合随机变量本身的特性．我们并不要求$n>N$时，$|X_n-X|<\varepsilon$恒成立，只要求n足够大时，出现$|X_n-X|>\varepsilon$的概率可以任意小．

定义　设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是一个随机变量序列，$X$是一个随机变量，如果对于任意正数$\varepsilon$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|>\varepsilon\}=0, \tag{4-23}$$

则称序列$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$**依概率收敛于**$X$，记作

$$X_n\xrightarrow{P}X .$$

4.4.3　大数定律

我们曾在第1章指出，在大量重复试验中，随机事件A发生的频率具有一定的稳定性，常在某一常数附近波动，这个常数即为事件A发生的概率．频率的稳定性是概率定义的客观基础，下面对频率的稳定性做出理论说明．

定理2（切比雪夫大数定律）　设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是相互独立的随机变量序列，其数学期望与方差都存在，且方差一致有界，即存在正数M，对任意$k\ (k=1,2,\cdots)$，有

$$D(X_k)\leqslant M ,$$

则对任意给定的正数ε，恒有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)\right|<\varepsilon\right\}=1. \tag{4-24}$$

定理3（伯努利大数定律）　设n_A是n重伯努利试验中事件A发生的次数，$p\ (0<p<1)$是事件A在一次试验中发生的概率，则对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1. \tag{4-25}$$

证明　由于n_A是n重伯努利试验中事件A发生的次数，所以$n_A\sim B(n,p)$，进而

$$E(n_A)=np,\quad D(n_A)=np(1-p),$$

$$E\left(\frac{n_A}{n}\right)=\frac{E(n_A)}{n}=p\,,\quad D\left(\frac{n_A}{n}\right)=\frac{D(n_A)}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}\,.$$

根据切比雪夫不等式，对任意 $\varepsilon>0$，有

$$P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-E\left(\frac{n_A}{n}\right)\right|<\varepsilon\right\}\geqslant 1-\frac{D\left(\frac{n_A}{n}\right)}{\varepsilon^2}\,,$$

即

$$1-\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\leqslant P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\leqslant 1\,.$$

令 $n\to\infty$，则有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1\,.$$

注意

> 由伯努利大数定律可以看出，当试验次数 n 充分大时，事件 A 发生的频率 $\frac{n_A}{n}$ 与其概率 p 能任意接近的可能性很大（概率趋近于1），这为实际应用中用频率近似代替概率提供了理论依据.

切比雪夫大数定律是 1866 年俄国数学家切比雪夫提出并证明的，它是大数定律的一个相当普遍的结果，而伯努利大数定律可以看成是它的推论．事实上，在伯努利大数定律中，令

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{在第}k\text{次试验中事件}A\text{发生,}\\ 0, & \text{在第}k\text{次试验中事件}A\text{不发生,}\end{cases}$$

其中，$k=1,2,\cdots$，则

$$X_k\sim B(1,p),\ \sum_{k=1}^{n}X_k=n_A,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k=\frac{n_A}{n},\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=p\,,$$

并且 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 满足切比雪夫大数定律的条件，于是由切比雪夫大数定律可证明伯努利大数定律.

注意

> 以上两个大数定律都是以切比雪夫不等式为基础来证明的，所以要求随机变量的方差存在．但是进一步的研究表明，方差存在这个条件并不是必要的．下面介绍的辛钦大数定律就表明了这一点.

定理 4（辛钦大数定律） 设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，服从同一分布，且具有数学期望 $E(X_k)=\mu\,(k=1,2,\cdots)$，则对任意给定的正数 ε，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{4-26}$$

注 意

伯努利大数定律表明：n 重伯努利试验中事件 A 发生的频率依概率收敛于事件 A 发生的概率，它以严格的数学形式阐述了频率具有稳定性的这一客观规律. 辛钦大数定律表明：n 个独立同分布的随机变量的算术平均值依概率收敛于随机变量的数学期望，这为实际问题中算术平均值的应用提供了理论依据.

例 3 已知 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立且都服从参数为 2 的指数分布，求当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ 依概率收敛的极限.

解 显然

$$E(X_k)=\frac{1}{2},\quad D(X_k)=\frac{1}{4},$$

所以

$$E(X_k^2)=E^2(X_k)+D(X_k)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\,(k=1,2,\cdots),$$

由辛钦大数定律得

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \xrightarrow{P} E(X_k^2)=\frac{1}{2}.$$

注 意

不同的大数定律应满足的条件是不同的：切比雪夫大数定律中虽然只要求 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立且不必具有相同的分布，但对于方差的要求是一致有界的；伯努利大数定律则要求 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 不仅独立同分布，而且要求均服从同参数的（0-1）分布；辛钦大数定律并不要求 X_k 的方差存在，但要求 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布. 各大数定律都要求 X_k 的数学期望存在，若数学期望不存在，则不满足大数定律. 例如，服从柯西分布，概率密度均为 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ 的相互独立的随机变量序列，由于数学期望不存在，因而不满足大数定律.

4.5　中心极限定理

许多随机现象是由大量相互独立的随机因素综合影响所形成的，其中每一个因素在总的影响中所起的作用是微小的，这类随机变量一般都服从或近似服从正态分布．例如，工程测量中影响测量结果的随机因素包括仪器偏差、大气折射造成的偏差、温度变化造成的偏差及估读偏差等，其中每一种误差造成的影响在总的影响中所起的作用是微小的，并且可以看成是相互独立的．而人们所关心的往往是测量所造成的总误差，因此需要讨论大量独立随机变量和的问题．

中心极限定理研究的正是大量独立随机变量和的极限分布问题，本节仅介绍两个常用的中心极限定理．

定理 1（**列维—林德伯格定理**）　设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，服从同一分布，且具有数学期望 $E(X_k)=\mu$ 和方差 $D(X_k)=\sigma^2>0\ (k=1,2,\cdots)$，则对任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \Phi(x)\ . \tag{4-27}$$

定理 1 也称为**独立同分布的中心极限定理**，它表明：只要相互独立的随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 服从同一分布，数学期望和方差（非零）存在，则当 $n\to\infty$ 时，随机变量

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

总以标准正态分布为极限分布．在实际应用中，只要 n 足够大，便可以近似地把 n 个独立同分布的随机变量之和当作正态随机变量来处理，即

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2) \text{ 或 } Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)\ . \tag{4-28}$$

下面的定理是独立同分布的中心极限定理的一种特殊情况．

定理 2（**棣莫弗—拉普拉斯定理**）　设随机变量 Y_n 服从参数为 $n, p\ (0<p<1)$ 的二项分布，则对任意实数 x，恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x). \tag{4-29}$$

由棣莫弗—拉普拉斯定理可知，只要n充分大，二项分布$B(n,p)$可以用正态分布来近似计算，计算方法如下.

（1）对$k=0,1,\cdots,n$，有

$$P\{X=k\}=P\{k-0.5<k\leqslant k+0.5\}\approx\Phi\left(\frac{k+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{k-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right). \tag{4-30}$$

（2）对非负整数$k_1,k_2(0\leqslant k_1<k_2\leqslant n)$，有

$$P\{k_1<X\leqslant k_2\}\approx\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right). \tag{4-31}$$

例 1 某射击运动员在一次射击中所得的环数X的分布律如表 4-4 所示，求在 100 次独立射击中所得环数不超过 930 的概率.

表 4-4

X	10	9	8	7	6
P	0.5	0.3	0.1	0.05	0.05

解 设X_i表示第$i\,(i=1,2,\cdots,100)$次射击的得分数，则$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$相互独立并且都与X的分布相同，计算可知

$$E(X_i)=9.15,\ D(X_i)=1.227\,5.$$

于是，根据独立同分布的中心极限定理，所求概率为

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\leqslant 930\right\}=P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i-100\times 9.15}{\sqrt{100\times 1.227\,5}}\leqslant\frac{930-100\times 9.15}{\sqrt{100\times 1.227\,5}}\right\}\approx\Phi(1.35)=0.911\,5.$$

例 2 某车间有 150 台同类型的机器，每台出现故障的概率都是 0.02，假设各台机器的工作状态相互独立，求机器出现故障的台数不少于 2 的概率.

解 以X表示机器出现故障的台数，依题意，$X\sim B(150,0.02)$，且

$$E(X)=np=150\times 0.02=3,$$
$$D(X)=np(1-p)=150\times 0.02\times(1-0.02)=2.94,$$
$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{2.94}=1.715,$$

由棣莫弗—拉普拉斯定理得

$$P\{X \geqslant 2\} = 1 - P\{X \leqslant 1\} = 1 - P\left\{\frac{X-3}{1.715} \leqslant \frac{1-3}{1.715}\right\}$$
$$\approx 1 - \varPhi(-1.166\,2) = 1 - [1 - \varPhi(1.166\,2)] = 0.879 .$$

例 3　一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是一个随机变量，平均每箱重 50 kg，标准差 5 kg．若用最大载重量为 5 t 的卡车承运，利用中心极限定理说明每辆车最多可装多少箱才能保证不超载的概率大于 0.977？

解　设每辆车最多可装 n 箱，记 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为装运的第 i 箱的重量（kg），则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且分布相同，有

$$E(X_i) = 50 ,\quad D(X_i) = 25 ,$$

于是 n 箱的总重量为

$$T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n ,$$

由独立同分布的中心极限定理得

$$P\{T_n \leqslant 5\,000\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 50n}{\sqrt{25n}} \leqslant \frac{5\,000 - 50n}{\sqrt{25n}}\right\} \approx \varPhi\left(\frac{5\,000 - 50n}{\sqrt{25n}}\right).$$

根据题意，令

$$\varPhi\left(\frac{5\,000 - 50n}{\sqrt{25n}}\right) > 0.977 = \varPhi(2) ,$$

即有

$$\frac{5\,000 - 50n}{\sqrt{25n}} > 2 ,$$

解得 $n < 98.02$，即每辆车最多可装 98 箱．

习题 4

1．设随机变量 X 的分布律如表 4-5 所示．求 $E(X)$，$E(X^2)$，$E(3X^2+5)$．

表 4-5

X	-2	0	2
P	0.3	0.4	0.3

2．设随机变量 (X, Y) 的联合分布律如表 4-6 所示．求 $E(X)$，$E(Y)$，$E(X-2Y)$，

$E(3XY)$.

表 4-6

$Y \backslash X$	-1	1	3
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$

3．已知 100 个产品中有 10 个次品，求任意取出的 5 个产品中次品数的期望值.

4．某产品的次品率为 0.1，检验员每天检验 4 次，每次随机地取得 10 件产品进行检验，如发现其中的次品数多于 1，就去调整设备．以 X 表示一天中调整设备的次数，试求 $E(X)$.（设各产品是否为次品是相互独立的）

5．连续型随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases} kx^a, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ $k, a>0$，又已知 $E(X)=0.75$，求 k 和 a 的值.

6．设某动物的寿命为 X（以年记）是一个随机变量，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \leqslant 5, \\ 1-\dfrac{25}{x^2}, & x>5. \end{cases}$$

求这种动物的平均寿命.

7．某公司生产的篮球直径服从均匀分布 $X \sim U(0, a)$，求篮球体积的数学期望.

8．设 X 的分布律如表 4-7 所示．求：（1）$D(X)$；（2）$D(-X+4)$.

表 4-7

X	-1	0	$\frac{1}{2}$	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

9．设随机变量 $X \sim B(n, p)$，$E(X)=2.4$，$D(X)=1.44$，求 n 和 p.

10．设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 求 $E(X), D(X)$.

11．设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 求 $E(X),D(X)$．

12．一个羽毛球的重量是随机变量，期望值为 10 g，标准差为 1 g．100 个一箱同型号羽毛球重量的期望值和标准差为多少？（设每个羽毛球重量不受其他羽毛球影响）

13．设灯管使用寿命 X 服从指数分布，且其平均使用寿命为 3 000 h．现有 10 只这样的灯管（并联）每天工作 4 h，求 150 天内这 10 只灯管：

（1）需要更换灯管的概率；（2）平均有几只需要更换；（3）需要更换灯管数的方差．

14．设随机变量 (X,Y) 的分布律如表 4-8 所示．求 $E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$，$\mathrm{cov}(X,Y)$，ρ_{XY}．

表 4-8

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0
2	$\frac{1}{28}$	0	0

15．设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{8}, & 0<x<2,0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 $E(X)$，$E(XY)$，$\mathrm{cov}(X,Y)$，ρ_{XY}．

16．已知 $X\sim N(2,9)$，$Y\sim N(1,16)$，相关系数 $\rho_{XY}=0.15$，求 $\mathrm{cov}(X,Y)$．

17．设随机变量 X，Y 的方差是 16，25，相关系数为 0.4，试求 $D(X+Y)$ 和 $D(X-Y)$．

18．设随机变量 (X,Y) 的分布律如表 4-9 所示．试证明 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的．

表 4-9

Y \ X	−1	0	1
−1	0.125	0.125	0.125
0	0.125	0	0.125
1	0.125	0.125	0.125

19．已知每毫升成人血液中平均含有 7 300 个淋巴细胞，均方差是 700．利用切比雪夫不等式估计每毫升血液存在 5 200～9 400 个淋巴细胞的概率．

20．设随机变量 X 的方差为 2.5，利用契比雪夫不等式估计 $P\{|X-E(X)|\geqslant 7.5\}$ 的值．

21．在次品率为 $\frac{1}{6}$ 的一大批产品中，任意抽取 300 件产品，利用中心极限定理计算抽取的产品中次品数在 40 与 60 之间的概率．

22．一部件包括 10 部分，每部分的长度是一个随机变量，它们相互独立且具有同一分布，其均值为 2 mm，均方差为 0.05 mm．规定总长度为 20 ± 0.1 mm 时产品合格，试求产品合格的概率．

23．某车间有 200 台车床，在生产时间内由于需要检修、调换刀具、变换位置、调换工作等常需停工，设开工率为 0.6，并设每台车床的工作是独立的且在开工时需电力 1 千瓦．问应供应该车间多少千瓦电力才能以 99.9%的概率保证该车间不会因供电不足而影响生产？

24．甲、乙两个戏院在竞争 1 000 名观众，假定每个观众随意地选择一个戏院，且观众之间的选择是彼此独立的，问每个戏院应该设有多少个座位才能保证因缺少座位而使观众离去的概率小于 1%？

第 5 章　数理统计的基础知识

概率论中所讨论和研究的随机变量，它的概率分布都是已知的，而实际情况往往并非如此，有可能完全不知道随机变量所服从的概率分布，也有可能仅知道随机变量服从的概率分布，但不知道其分布函数中所含的参数．例如，在一段时间内，某地区发生的雷暴数量服从什么分布是完全不知道的；血样化验结果为“阴性”和“阳性”之一，服从两点分布，但分布中的参数是不知道的．要深入研究这些问题，就必须知道与之相对应的概率分布及其参数，这些正是数理统计首先要解决的问题．数理统计是以概率论为基础，根据试验或观察到的数据，对研究对象的客观规律做出种种合理的估计和推断．数理统计包括两个方面的内容：一方面是如何合理地搜集数据，包括抽样方法、试验设计等；另一方面是根据收集到的样本数据来分析、推断整体情况，即统计推断，这是本书讲述的重点．

本章介绍了总体、样本、统计量等基本概念，并着重介绍了 χ^2 分布、t 分布、F 分布以及其他抽样分布．

5.1　数理统计的基本概念

5.1.1　总体与样本

定义 1　某一特定研究中研究对象的全体称为**总体**，记为 X，它是一个随机变量．组成总体的每个基本单位称为**个体**．

例如，研究某大学学生的身高时，该大学全体学生的身高构成问题的总体，而每一个学生的身高是个体．

定义 2　总体中所包含的个体的个数称为**总体的容量**．容量为有限的总体称为**有限总体**；容量为无限的总体称为**无限总体**．

例如，一批待审查账目是有限总体；空气中悬浮颗粒的总数可以认为是一个无限总体．

提　示

随机变量的分布函数、分布律（离散型）或概率密度（连续型）也称为总体的分布函数、分布律或概率密度，并统称为总体的分布．

它的观测值记为$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)$.

（3）样本标准差为

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\,,\tag{5-3}$$

它的观测值记为$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$.

（4）样本k阶原点矩为

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\ (k=1,2,3,\cdots)\,,\tag{5-4}$$

它的观测值记为$a_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k\ (k=1,2,3,\cdots)$.

显然，样本的一阶原点矩就是样本均值.

（5）样本k阶中心矩为

$$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k\ (k=1,2,3,\cdots)\,,\tag{5-5}$$

它的观测值记为$b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^k\ (k=1,2,3,\cdots)$.

显然，样本一阶中心矩恒等于零.

例 2 有一批钢管，从中抽取了 10 根进行长度测量，得数据如下（单位：cm）：

19.6，19.5，18.9，19.1，18.7，18.9，19.0，18.8，19.2，19.3.

试求样本均值、样本方差和样本标准差的观测值.

解 题中数据是容量为 10 的样本观测值，因此，样本均值的观测值为

$$\overline{x}=\frac{1}{10}(19.6+19.5+18.9+19.1+18.7+18.9+19.0+18.8+19.2+19.3)=19.1\,.$$

由于

$$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=19.6^2+19.5^2+18.9^2+19.1^2+18.7^2+18.9^2+19.0^2+18.8^2+19.2^2+19.3^2=3\,648.9\,,$$

所以，样本方差的观测值为

$$s^2=\frac{1}{10-1}\left(\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2\right)=\frac{1}{10-1}\times0.8=0.09\,,$$

样本标准差的观测值为

$$s=\sqrt{0.09}=0.3\,.$$

提示

参数是研究者想要了解的关于总体的某种特征值，而总体的情况往往又是未知的，所以参数一般是未知数，如总体平均数μ、总体方差σ^2等．在大多数情况下，常通过抽样的方法，通过样本的信息来推断总体的情况．抽样的目的就是用样本统计量去估计总体参数．例如，用样本平均数$\overline{X}$去估计总体平均数μ，用样本方差S_n^2去估计总体方差σ^2等．

5.1.3　次序统计量和样本分布函数

定义 7　设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为总体X的一个简单随机样本，将其各分量$X_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$按由小到大的次序重新排列为$X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$，即$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$，称$X_{(k)}\ (k=1, 2, \cdots, n)$为**总体的第$k$个次序统计量**．特别地，称$X_{(1)}$为**极小值次序统计量**，称$X_{(n)}$为**极大值次序统计量**．

注意

$X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$中的各分量不再相互独立，也不再与总体同分布．

例 3　在总体$N(12, 4)$中抽出容量为 5 的样本X_1, X_2, X_3, X_4, X_5，求概率$P\{X_{(5)}>15\}$和$P\{X_{(1)}<10\}$．

解　设总体X的分布函数为$F(x)$，则随机变量$X_{(5)}$和$X_{(1)}$的分布函数分别为

$$F_{\max}(x)=[F(x)]^5 \text{ 和 } F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^5,$$

因此

$$P\{X_{(5)}>15\}=1-P\{X_{(5)}\leqslant 15\}=1-F_{\max}(15)=1-[F(15)]^5=1-[\Phi(1.5)]^5=0.292\,3,$$

$$P\{X_{(1)}<10\}=F_{\min}(10)=1-[1-F(10)]^5=1-[\Phi(1)]^5=1-(0.841\,3)^5=0.578\,5.$$

定义 8　对于任何实数x，$F_n(x)$等于样本的n个观测值中不超过x的个数除以样本容量n．由频率与概率的关系知道，$F_n(x)$可作为未知分布函数$F(x)$的一个近似，n越大，$F_n(x)$越接近$F(x)$，称$F_n(x)$为**样本分布函数**（或**经验分布函数**）．

设样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的次序统计量为$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$，对应的样本观测值为$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$，令

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<x_{(1)},\\ \dfrac{1}{n}, & x_{(1)}\leqslant x<x_{(2)},\\ \quad\vdots & \\ \dfrac{k}{n}, & x_{(k)}\leqslant x<x_{(k+1)},\\ \quad\vdots & \\ 1, & x\geqslant x_{(n)}.\end{cases}\tag{5-6}$$

$F_n(x)$ 的图形就是累积频率曲线，它是跳跃式上升的一条阶梯形曲线．若所有观测值都不相等，则每一跨度为 $\dfrac{1}{n}$；若某个观测值有 m 次相等情形，则在该值处跳跃上升 $\dfrac{m}{n}$．

提 示

总体就是一个随机变量 X，对总体分布的描述可以利用容量为 n 的样本构造样本分布函数 $F_n(x)$ 来近似描述总体 X 的分布函数，并随着样本容量的增大，使所构造的样本分布函数越来越逼近总体的分布函数，从而达到研究总体的目的．

根据样本分布函数的定义，易知 $F_n(x)$ 具有以下性质：

（1）$0\leqslant F_n(x)\leqslant 1$；

（2）$F_n(x)$ 是单调不减函数；

（3）$F_n(x)$ 在每个观测值 $x_{(i)}$ 处是右连续的；

（4）$F_n(-\infty)=0, F_n(+\infty)=1$．

例 4 设总体服从泊松分布，容量为 10 的样本观测值如下：

$$2，1，4，3，5，6，4，8，4，3.$$

试构造样本的分布函数 $F_{10}(x)$．

解 将样本的观测值由小到大排列为 $1<2<3=3<4=4=4<5<6<8$，所以样本的频率分布如表 5-1 所示．

表 5-1

x	1	2	3	4	5	6	8
f_n	0.1	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1	0.1

因此，样本分布函数 $F_n(x)$ 为

$$F_{10}(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 0.1, & 1\leqslant x<2,\\ 0.2, & 2\leqslant x<3,\\ 0.4, & 3\leqslant x<4,\\ 0.7, & 4\leqslant x<5,\\ 0.8, & 5\leqslant x<6,\\ 0.9, & 6\leqslant x<8,\\ 1, & x\geqslant 8.\end{cases}$$

样本分布函数 $F_n(x)$ 的图形如图 5-1 所示.

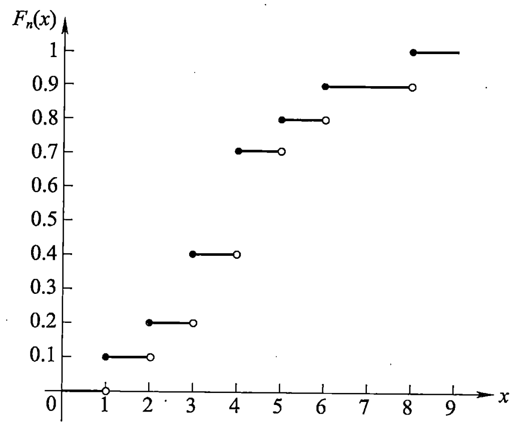


图 5-1

5.2　描述性统计简介

为了研究总体分布的性质，人们通过试验得到许多观测值，这些数据一般都是杂乱无章的，需对数据进行整理，并常借助表格或图形对数据加以描述. 数值型数据整理常用的方法是分组.

分组是指根据研究的需要，将数据分为不同的组别. 常用的数据分组为单项式分组和组距式分组. 其中，单项式分组只适用于离散变量，且在变量较少的情况下使用；组距式分组常用于连续变量或变量值较多的情况.

定义　将全部变量值依次划分为若干个区间，并将这一区间的变量值作为一组，这种分组方法称为**组距式分组**. 在组距式分组中，一个组的最小值称为**下限**；一个组的最大值称为**上限**；一个组的上限与下限的差，称为**组距**，记为 $\varDelta$，其计算公式为：组距 =（最大值 − 最小值）÷ 组数.

分组的具体步骤如下．

第一步：确定组数．实际分组时，常根据以下经验公式来确定组数 K ：

$$K=1+\frac{\ln n}{\ln 2}\approx 1+1.4427\ln n\text{，} \tag{5-7}$$

其中，n 为数据的个数．将式（5-7）的计算结果按四舍五入取整即为组数．实际应用时，可根据数据的多少和特点及分析的要求，参考这一标准灵活确定组数．

第二步：确定各组的组距和组限．组距的大小一般由组数和全距来决定．全距是所有数据中最大值与最小值之差．为了便于计算，组距宜取 5 或 10 的倍数，而且第一组的下限应低于最小变量值，最后一组的上限应高于最大变量值．离散型变量每一组的上、下限都可以用确定的数值表示，如区间 $[a,b]$ ；连续型变量前一组的上限与后一组的下限重叠，常把重叠的数值归入到后一组，如 $[a,b)$ ．

第三步：根据分组整理成频数分布表，绘制频率直方图．先数出落在每个小区间内的数据的频数 f_i ，再算出频率 f_i/n ，最后从左至右依次在各个小区间上作以 $\frac{f_i}{n}\Big/\varDelta$ 为高的小矩形，得到该数据的频率直方图．显然，小矩形的面积就等于数据落在该小区间的频率 f_i/n ．

例 5 84 个男伊特拉斯坎（Etruscan）人头颅的最大宽度如下（mm）：

141，148，132，138，154，142，150，146，155，158，
150，140，147，148，144，150，149，145，149，158，
143，141，144，144，126，140，144，142，141，140，
145，135，147，146，141，136，140，146，142，137，
148，154，137，139，143，140，131，143，141，149，
148，135，148，152，143，144，141，143，147，146，
150，132，142，142，143，153，149，146，149，138，
142，149，142，137，134，144，146，147，140，142，
140，137，152，145．

试画出这些数据的频率直方图．

解 由式（5-7）计算组数 K 为

$$K=1+\frac{\ln n}{\ln 2}=1+\frac{\ln 84}{\ln 2}\approx 7\text{．}$$

组距 $\varDelta$ 为

$$\varDelta=(159.5-124.5)/7=5\text{．}$$

根据分组整理成频数分布表，如表 5-2 所示．

表 5-2

分组	频数 f_i	频率 f_i/n	累积频率
124.5～129.5	1	0.011 9	0.011 9
129.5～134.5	4	0.047 6	0.059 5
134.5～139.5	10	0.119 1	0.178 6
139.5～144.5	33	0.392 9	0.571 5
144.5～149.5	24	0.285 7	0.857 2
149.5～154.5	9	0.107 1	0.964 3
154.5～159.5	3	0.035 7	1

根据分组数据绘制频率直方图，如图 5-2 所示.

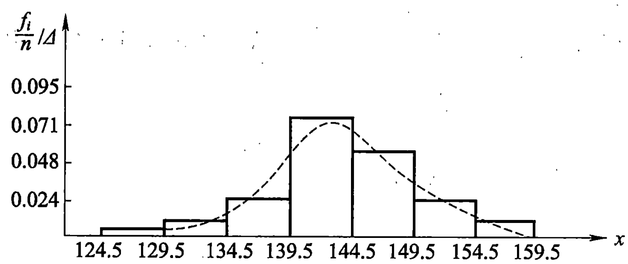


图 5-2

5.3　抽样分布

在使用统计量进行统计推断时，常需要知道它的分布．当总体的分布函数已知时，抽样分布是确定的，然而要求出统计量的精确分布，一般是比较困难的．本节介绍三个常用的重要统计量，它们是以标准正态变量为基石而构造的，加上正态分布本身，它们就构成了数理统计中的“四大抽样分布”，这四大分布在实际中有着广泛的应用，这是因为这四个统计量不仅有明确背景，而且其抽样分布的概率密度有明确表达式.

5.3.1　三个重要分布

为了便于后面的讨论，首先引进数理统计中占有重要地位的三大分布：χ^2 分布，t 分布和 F 分布.

1. χ^2分布

定义 1 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为独立同分布的随机变量，且都服从$N(0,1)$，则称统计量

$$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2 \tag{5-8}$$

服从自由度为n的χ^2**分布**，记为$\chi^2\sim\chi^2(n)$.

定义 1 中的自由度是指χ^2中所包含的独立变量的个数.

$\chi^2(n)$分布的概率密度为

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{5-9}$$

其中，伽马函数$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$（$x>0$）. χ^2分布的概率密度图形是一个只取非负值的偏态分布，如图 5-3 所示.

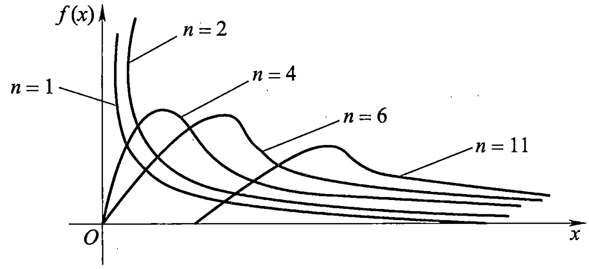


图 5-3

若$X\sim\chi^2(n)$，$Y\sim\chi^2(m)$，且X与Y相互独立，则$X+Y\sim\chi^2(n+m)$. 这就是χ^2分布的可加性.

χ^2分布是由正态分布派生出来的一种分布，其数学期望与方差如下.

若$\chi^2\sim\chi^2(n)$，则有

$$E(\chi^2)=n,\quad D(\chi^2)=2n. \tag{5-10}$$

事实上，因$X_i\sim N(0,1)$，故

$$E(X_i^2)=D(X_i)=1,\quad E(X_i^4)=3\ (i=1,2,\cdots,n).$$

因此$E(\chi^2)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=n$.

又$D(X_i^2)=E(X_i^4)-[E(X_i^2)]^2=3-1=2$. 由于$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，所以$X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$也相互独立，于是

$$D(\chi^2)=D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i^2)=2n .$$

2. t 分布

定义 2　设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X,Y 独立，则称随机变量

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \tag{5-11}$$

服从自由度为 n 的 **t 分布**，记为 $t\sim t(n)$.

提示

t 分布是英国统计学家哥塞特首先发现的. 哥塞特年轻时在牛津大学学习数学和化学，1899 年开始在一家酿酒厂担任酿酒化学技师，从事试验和数据分析工作. 由于当时在工作中哥塞特接触的样本容量都比较小，一般只有四五个，所以在大量的试验数据积累过程中，哥塞特发现 $t=\sqrt{n-1}(\overline{X}-\mu)/s$ 的分布与传统认定的 $N(0,1)$ 分布并不同，特别是尾部的概率相差较大. 由此，哥塞特就怀疑是否有另一个分布族存在，通过大量深入的研究与实践，哥塞特于 1908 年以学生（student）的笔名在英国的《Biometrike》杂志上发表了他的研究结果，故 t 分布也称为学生分布. t 分布的发现在统计学史上具有划时代的意义，因为它打破了正态分布一统天下的局面，开创了小样本统计推断的新纪元.

$t(n)$ 分布的概率密度为

$$t(x;n)=\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n}\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}\quad(-\infty<x<+\infty). \tag{5-12}$$

t 分布的概率密度是一个关于 y 轴对称的分布图，它与标准正态分布的概率密度图形非常类似，只是峰比标准正态分布的低一些，尾部的概率比标准正态分布大一些，如图 5-4 所示.

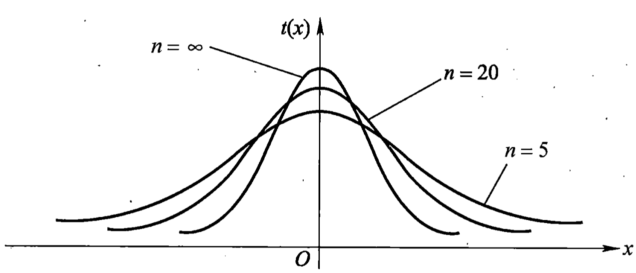


图 5-4

提 示

需要指出的是，当 n 充分大时，t 分布可以近似看作是标准正态分布，即有 $\lim\limits_{n\to\infty} t(x;n)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$；但当 n 较小时，t 分布与正态分布的差异是不能忽略的.

t 分布的数学期望与方差：

若 $t\sim t(n)$，则

当 $n=1$ 时，t 分布即为标准柯西分布，其均值不存在；

当 $n>1$ 时，t 分布的数学期望存在，且 $E(t)=0$；

当 $n>2$ 时，t 分布的方差存在，且 $D(t)=n/(n-2)$.

3. F 分布

定义 3 设 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X,Y 独立，则称随机变量

$$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2} \tag{5-13}$$

服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布，记为 $F\sim F(n_1,n_2)$.

$F(n_1,n_2)$ 分布的概率密度为

$$\varphi(x;n_1,n_2)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma[(n_1+n_2)/2](n_1/n_2)^{n_1/2}x^{(n_1/2)-1}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)[1+(n_1x/n_2)]^{(n_1+n_2)/2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases} \tag{5-14}$$

F 分布的概率密度图形与 χ^2 分布的类似，是一个只取非负值的偏态分布，如图 5-5 所示.

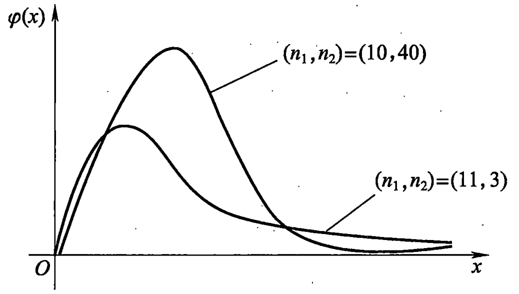


图 5-5

显然，由定义可知，若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$.

5.3.2　抽样分布的分位点

1. 标准正态分布的上 α 分位点

定义 4　设 $X \sim N(0,1)$，对于任意给定的 $\alpha\,(0<\alpha<1)$，如果 u_α 满足条件

$$P\{X > u_\alpha\} = \int_{u_\alpha}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = \alpha\,, \tag{5-15}$$

则称 u_α 为标准正态分布的**上 α 分位点**（或**分位数**），如图 5-6 所示.

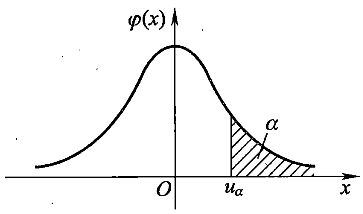


图 5-6

由上 α 分位点定义可知 $P\{X \leqslant u_\alpha\} = 1 - P\{X > u_\alpha\} = 1-\alpha$，所以 $\varPhi(u_\alpha) = 1-\alpha$.

由图 5-6 可看出，

$$u_{1-\alpha} = -u_\alpha\,. \tag{5-16}$$

从正态分布的函数表求上 α 分位点的方法是：对于给定的 α，点 u_α 的值等于概率 $1-\alpha$ 所对应的 u 值. 例如，求 $u_{0.025}$ 的值.

因为 $\alpha = 0.025$，$1-\alpha = 0.975$，查标准正态分布表（见附表 2）可得，$\varPhi(1.96) = 0.975$，所以 $u_{0.025} = 1.96$. 类似地，可求得 $u_{0.05} = 1.645$.

2. χ^2 分布的上 α 分位点

定义 5　对于给定的 $\alpha\,(0<\alpha<1)$，若 $\chi_\alpha^2(n)$ 满足条件：

$$P\left\{\chi^2(n) > \chi_\alpha^2(n)\right\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \alpha\,, \tag{5-17}$$

则称点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的**上 α 分位点**，如图 5-7 所示.

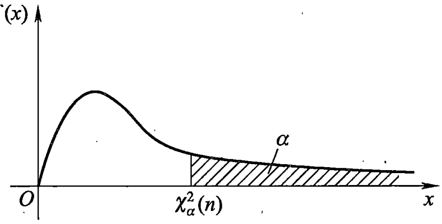


图 5-7

对于不同的α与n，上α分布点$\chi_{\alpha}^{2}(n)$的值可以通过查附表 3 得到.

例如，$\chi_{0.1}^{2}(25)=34.382 \Leftrightarrow P\left\{\chi^{2}(25)>34.382\right\}=0.1$；

$\chi_{0.95}^{2}(10)=3.94 \Leftrightarrow P\left\{\chi^{2}(10)>3.94\right\}=0.95$.

附表 3 只列出了自由度为 1～45 的χ^{2}分布值．当自由度$n>45$时，可用以下近似公式计算：

$$\chi_{\alpha}^{2}(n) \approx \frac{1}{2}\left(u_{\alpha}+\sqrt{2n-1}\right)^{2}, \tag{5-18}$$

其中，u_{α}为标准正态分布的上α分位点.

例如，$\chi_{0.025}^{2}(61) \approx \frac{1}{2}\left(u_{0.025}+\sqrt{2\times 61-1}\right)^{2}=\frac{1}{2}\times\left(1.96+\sqrt{2\times 61-1}\right)^{2}=83.9808$.

3. t分布的上α分位点

定义 6 对于给定的$\alpha\,(0<\alpha<1)$，若点$t_{\alpha}(n)$满足条件：

$$P\left\{t(n)>t_{\alpha}(n)\right\}=\int_{t_{\alpha}(n)}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\alpha, \tag{5-19}$$

则称点$t_{\alpha}(n)$为$t(n)$分布的**上α分位点**，如图 5-8 所示.

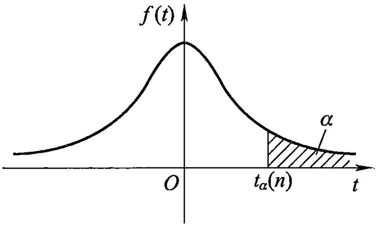


图 5-8

由图 5-8 及t分布的上α分位点定义，可得到t分布的对称性：

$$t_{1-\alpha}(n)=-t_{\alpha}(n). \tag{5-20}$$

对于不同的α与n，上α分位点$t_{\alpha}(n)$的值可以通过查附表 4 得到.

例如，$t_{0.1}(25)=1.3163 \Leftrightarrow P\left\{t(25)>1.3163\right\}=0.1$；

$t_{0.95}(10)=-t_{0.05}(10)=-1.8125 \Leftrightarrow P\left\{t(10)>-1.8125\right\}=0.95$.

4. F分布的分位点

定义 7 对于给定的$\alpha\,(0<\alpha<1)$，若点$F_{\alpha}(n_1, n_2)$满足条件：

$$P\left\{F>F_{\alpha}(n_1, n_2)\right\}=\int_{F_{\alpha}(n_1, n_2)}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x=\alpha, \tag{5-21}$$

则称点 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 为 F 分布的上 α **分位点**，如图 5-9 所示.

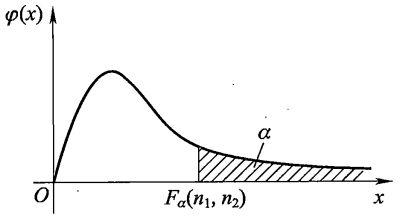


图 5-9

对于不同的 α 与 n，上 α 分位点 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 的值可以通过查表得到.

提　示

可用 $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = 1/F_\alpha(n_2, n_1)$ 来求 F 分布表中未列出的常用的上 α 分位点. 例如，$F_{0.95}(12, 9) = 1/F_{0.05}(9, 12) = 1/2.80 = 0.357$.

5.3.3　正态总体的抽样分布

对于正态总体，其样本均值、样本方差及某些重要统计量的抽样分布都具有非常完善的理论成果，它们为讨论参数评估和假设检验奠定了坚实的基础. 我们将这些内容归纳成下面的定理.

定理 1　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则

（1）$\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$；　　（2）$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；

（3）$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立；　　（4）$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$.

这里，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，即

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i，\quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 .$$

证明　（1）因为 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$，且独立正态随机变量的线性组合仍是正态随机变量，而根据数学期望和方差的性质知

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu ,$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n} ,$$

所以$\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

（2）和（3）的证明略.

（4）因为$\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，所以$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$. 又$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，并且由于$\overline{X}$与$S^2$相互独立，从而$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$与$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$相互独立，因此

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}=\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}\sim t(n-1).$$

定理 2　设$X_1,X_2,\cdots,X_m$是来自正态总体$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$的样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$是来自正态总体$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$的样本，且X与Y独立，则

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2).$$

其中

$$\overline{X}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i,\quad S_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2;$$

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\quad S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2;$$

$$S_w^2=\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}=\frac{m-1}{m+n-2}S_1^2+\frac{n-1}{m+n-2}S_2^2,$$

即S_w^2是S_1^2和S_2^2的加权平均.

证明　由定理 1 知

$$\overline{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma^2}{m}\right),\quad \overline{Y}\sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma^2}{n}\right).$$

因为X与Y相互独立，于是$\overline{X}$与$\overline{Y}$相互独立，从而

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\sigma^2\right),$$

即

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim N(0,1).$$

又由定理 1 知

$$\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1), \quad \frac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

且二者相互独立，根据 χ^2 分布的可加性知

$$\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{\sigma^2} = \frac{(m+n-2)S_w^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2).$$

又因为 $\dfrac{(m+n-2)S_w^2}{\sigma^2}$ 与 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/m+1/n}}$ 相互独立，根据 t 分布的定义知结论成立.

定理 3　设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是来自正态总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且 X 与 Y 相互独立，则

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1).$$

其中，$S_1^2 = \dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$.

证明　由定理 1 知

$$\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m-1), \quad \frac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n-1),$$

且二者相互独立，根据 F 分布的定义有

$$\frac{\dfrac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(m-1)}{\dfrac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(n-1)} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1).$$

本节所介绍的这几个分布以及重要结论，在后面章节中都起着重要的作用．应注意，它们都是在总体为正态分布这一基本假定下得到的.

5.3.4　样本比例的抽样分布

在经济、管理中经常需要研究总体或样本中具有某种属性的个体占全体单位数的百分比问题．由此需要研究样本比例的分布问题.

设总体 $X = \begin{cases} 1, & \text{具有某种属性,} \\ 0, & \text{不具有某种属性,} \end{cases}$ 而 $P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=q=1-p$，$p$ 称为总体成数，即总体中具有某种属性的比例．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，$X_i = \begin{cases} 1, & \text{样本中第}i\text{个分量具有某种属性,} \\ 0, & \text{样本中第}i\text{个分量不具有某种属性,} \end{cases}$ $i=1,2,\cdots,n$，则 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 为样本中具

有某种属性之比，称为**样本比例**或**样本成数**.

若从总体中随机抽取出容量为n的一个样本，发现其中具有某种属性的单位数为m，则样本中具有某种属性的单位的比例就为m/n．样本比例$\overline{X}$也是一个随机变量，

$E(\overline{X})=E(X)=p$，$D(\overline{X})=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}D(X)=\frac{p(1-p)}{n}$，由中心极限定理，当样本容量$n$很大时，$\overline{X}$近似地服从正态分布．其数学期望为总体的比例$p$，方差等于$p(1-p)/n$，即

$$\overline{X}\sim N(p\,,p(1-p)/n)\,. \tag{5-22}$$

但是，要使样本比例$\overline{X}$的抽样分布近似于正态分布，样本容量n必须很大（≥30），并且要满足np和$n(1-p)$都不小于5.

例 在最近的一次选举中，一位州代表获得了52%的投票．选举一年以后，该代表组织了一次调查，选取一个由300人组成的随机样本，请问他们在下一次选举中还会投票给该代表的概率是多少？

解：会投票给该代表的回答者的数目服从$n=300$，$p=0.52$的二项分布．要求的是样本比例大于50%即$\overline{X}>0.50$的概率．由式(5-22)可知，样本比例$\overline{X}$近似服从均值$p=0.52$，标准差$\sqrt{p(1-p)/n}=\sqrt{0.52\times0.48/300}=0.028\,8$的正态分布，计算可得

$$P\left\{\overline{X}>0.50\right\}=P\left\{\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}>\frac{0.50-0.52}{0.028\,8}\right\}=P\left\{\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}>-0.69\right\}$$

$$=1-\Phi(-0.69)=\Phi(0.69)=0.754\,9\,.$$

假设支持水平仍为52%，则300人样本中超过半数会投票给该代表的概率是75.49%.

习题 5

1．若总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中σ^2已知，但μ未知，而$X_1,X_2,\cdots,X_n$为它的一个简单随机样本．下列函数中，哪些是统计量，哪些不是统计量？

（1）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；　（2）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$；　（3）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；

（4）$\dfrac{\overline{X}-3}{\sigma}\sqrt{n}$；　　（5）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$；　　（6）$\dfrac{\overline{X}-5}{\sqrt{\dfrac{1}{n(n-1)}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}$.

2．从某工人生产的钉子中随机抽取 5 只，测得其直径（单位：mm）分别为：

13.7，13.08，13.11，13.11，13.13.

求样本观测值的均值和方差.

3．设抽样得到的样本观测值为

38.2，40.2，42.4，37.6，39.2，41.0，44.0，43.2，38.8，40.6.

计算样本均值、样本方差、样本标准差与样本二阶中心矩.

4．若样本分布函数为$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{1}{7}, & 1\leqslant x<2.2,\\ \dfrac{4}{7}, & 2.2\leqslant x<2.5,\\ \dfrac{6}{7}, & 2.5\leqslant x<3.1,\\ 1, & x\geqslant 3.1.\end{cases}$试求该样本的频率分布表.

5．设$T\sim t(10)$，求常数 c，使$P\{T>c\}=0.95$.

6．总体分布 X 服从正态分布$N(0,4)$，而且是来自总体 X 的样本，则随机变量$Y=\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$服从什么分布？

第 6 章　参数估计

数理统计的基本问题就是根据样本所提供的信息，对总体的分布或分布的数字特征等做出统计推断．本章所要探讨的是这样一类问题，即在总体所服从的分布类型已知的条件下，估计某些未知的参数，如数学期望、方差等．这类问题称为**参数估计**．参数估计的方式有两种，一种是参数的值估计（点估计），另一种是参数的范围估计（区间估计）．对于这类问题，关键是构造合理的方法将这些未知参数估计出来．

6.1　点估计

用一个数值来估计某个参数，这种估计就是点估计．例如，要考察某城市拥有汽车的家庭所占的比例，抽查了 1 000 个家庭，然后估计出这个比例值为 0.28，这个值就是“比例”这个未知数的点估计．

定义 1　设 θ 为总体 X 的待估计参数，用样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 来估计 θ，则称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 θ 的一个**点估计量**；对应于样本观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 θ 的**点估计值**．

在不至于混淆的情况下，估计量和估计值统称为估计．

那么，如何构造一个统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 作为 θ 的估计量呢？对于点估计问题，关键是找一个合适的统计量，所谓合适是指既有合理性，又有计算上的方便性．这里只介绍两种常用的点估计方法：矩估计法和极大似然估计法．

6.1.1　矩估计法

样本取自总体，根据大数定律，样本矩在一定程度上反映了总体矩的特征，因而很自然想到用样本矩来估计与之相应的总体矩，由此得到的参数估计称为**矩估计法**．

矩估计是一种简单、直观的估计方法，是由统计学家皮尔逊在 19 世纪末引进的．

定义 2　设总体 X 的分布函数为 $F(x; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$，其中，$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 是待估计的 k 个未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的 n 个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是样本观测值，假设 X 的 $1 \sim k$ 阶原点矩都存在，则有

$$\mu_i = E(X^i) = \mu_i(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)\ (i = 1, 2, \cdots, k).$$

取样本的 i 阶原点矩 A_i 作为总体 i 阶原点矩 μ_i 的估计量，即

$$\hat{\mu}_i = A_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^i, \tag{6-1}$$

得方程组

$$\mu_i(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = \hat{\mu}_i,$$

解得

$$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(X_1, X_2, \cdots, X_n),$$

称 $\hat{\theta}_i$ 为 θ_i 的**矩法估计量**，简称**矩估计**.

例 1　设总体 X 具有概率密度 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\theta^2}(\theta - x), & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 参数 θ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本，求 θ 的矩法估计量.

解　总体 X 的数学期望为

$$E(X) = \int_0^{\theta} \frac{2x}{\theta^2}(\theta - x)\mathrm{d}x = \frac{\theta}{3}.$$

由式（6-1），令 $E(X) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$，可得 θ 的矩法估计量为

$$\hat{\theta} = 3\overline{X}.$$

例 2　设总体 $X \sim B(m, p)$，其中 m 已知，求 p 的矩估计量.

解　由二项分布的性质可知

$$E(X) = mp.$$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本，根据式（6-1）可得

$$E(X) = mp = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}.$$

解方程得 p 的矩估计量为

$$\hat{p} = \frac{\overline{X}}{m}.$$

例 3　设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 是未知参数. 试求 μ, σ^2 的矩估计量.

解　已知总体 X 的 $E(X)$ 和 $D(X)$ 均存在且有限，即 $E(X) = \mu$，$D(X) = \sigma^2$. 现设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本，根据式（6-1）得到

$$\begin{cases} E(X) = \mu = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}, \\ E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2. \end{cases}$$

解上述方程组，得 μ,σ^2 的矩估计量分别为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X},$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{n-1}{n}S^2,$$

其中，S^2 是样本方差.

6.1.2 极大似然估计法

在随机试验中，许多事件都有可能发生，概率大的事件发生的可能性也大，若在一次试验中，某事件 A 发生了，则有理由认为事件 A 比其他事件发生的概率大，这就是所谓的**极大似然原理**，极大似然估计法就是依据这一原理得到的一种参数估计方法.

极大似然估计法是费歇（R. A. Fisher）在 1912 年提出来的，是一种重要的点估计方法. 下面先介绍似然函数的概念.

1. 似然函数

定义 3 设总体 X 的分布律或概率密度为 $f(x;\theta)$，$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k)$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本，则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合分布律或概率密度函数

$$L(x_1,x_2,\cdots;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta) \tag{6-2}$$

为样本的**似然函数**，简记为 $L(\theta)$.

提 示

（1）当总体 X 为离散型随机变量时，$f(x;\theta)$ 为 X 的分布律 $P(x;\theta)$；

（2）当总体 X 为连续型随机变量时，$f(x;\theta)$ 为 X 的概率密度.

2. 极大似然估计法

下面结合例子来介绍极大似然估计法的基本思想.

例 4 设在一个箱子中装有若干个白色和黄色乒乓球，且已知两种球的数目之比为 1∶3，但不知是白球多还是黄球多. 现从中有放回地任取 3 个球，发现有两个白球. 问：白球所占的比例是多少？

解 设白球所占的比例为 p，则 $p=\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$. 又设 X 为任取 3 个球中所含白球的个数，则 $X\sim B(3,p)$，所以

$$P\{X=2\}=\mathrm{C}_3^2p^2(1-p)=3p^2(1-p).$$

于是，当 $p=\frac{1}{4}$ 时，$P\{X=2\}=\frac{9}{64}$；当 $p=\frac{3}{4}$ 时，$P\{X=2\}=\frac{27}{64}$.

因为 $\frac{9}{64}<\frac{27}{64}$，这就意味着使 $\{X=2\}$ 的样本来自 $p=\frac{3}{4}$ 的总体比来自 $p=\frac{1}{4}$ 的总体的可能性要大，因而取 $\frac{3}{4}$ 作为 p 的估计值比取 $\frac{1}{4}$ 作为 p 的估计值更合理，故认为白球所占的比例是 $\frac{3}{4}$.

上例中选取 p 的估计值 $\hat{p}$ 的原则是：对每个样本观测值，选取 $\hat{p}$ 使得样本观测值出现的概率最大. 这种选择使得概率最大的那个 $\hat{p}$ 作为参数 p 的估计的方法，就是极大似然估计法. 用同样的思想方法也可以估计连续型总体的参数. 这种方法的基本思想是利用"概率最大的事件最可能出现"这一直观想法，即对 $L(\theta)$ 固定样本观测值 $x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，选择适当的参数 $\hat{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$，使 $L(\theta)$ 达到最大值，并把 $\hat{\theta}$ 作为参数 θ 的估计值. 为此引入下面的定义.

定义 4　如果样本似然函数 $L(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 在 $\theta_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (i=1,2,\cdots,k)$ 处达到最大值，则称 $\hat{\theta}_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (i=1,2,\cdots,k)$ 为参数 θ_i 的**极大似然估计值**，而称相应的统计量 $\hat{\theta}_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为参数 θ_i 的**极大似然估计量**.

由定义可知，求参数的极大似然估计问题，其实就是求似然函数 L 的最大值问题. 一般情况下，似然函数 L 的最大值点的一阶偏导数为零，但直接对似然函数 L 求偏导，计算量比较大. 我们知道，$\ln x$ 是 x 的单调上升函数，因此，$\ln L$ 与 L 有相同的最大值点，故只需求 $\ln L$ 的最大值点即可. 因此，求极大似然估计量的一般步骤如下：

（1）根据总体 X 的分布律或概率密度 $f(x;\theta)$，由式（6-2）得出似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta);$$

（2）对似然函数取对数

$$\ln L(\theta)=\ln\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta);$$

（3）写出似然方程

$$\frac{\mathrm{d}L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0.$$

若方程有解，则求出 $L(\theta)$ 的最大值点 $\theta=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_k)$，于是 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 即为 θ 的极大似然估计量. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本的观测值，则 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 θ 的极大似然估计值.

提 示

（1）若似然函数中含有多个未知参数，则可解方程组

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,k).$$

设解得 $\hat{\theta}_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 $\hat{\theta}_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ_i 的极大似然估计量.

（2）若似然方程无解，即似然函数没有驻点，通常在边界点上达到最大值，可由定义通过对边界点的分析直接推求.

（3）若 $\hat{\theta}$ 是未知参数的极大似然估计值，$y(\theta)$ 是 θ 的严格单调函数，则 $y(\theta)$ 的极大似然估计值为 $y(\hat{\theta})$.

例 5 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应的样本值. 总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $0<\theta<\infty$，求参数 θ 的极大似然估计量和估计值.

解 样本的似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{x_i}{\theta}}\right],$$

对似然函数取对数得

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{x_i}{\theta}}=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-2n\ln\theta-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta},$$

则似然方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\ln L(\theta)]=-\frac{2n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0,$$

解得

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{\overline{x}}{2}.$$

相应的极大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{2}.$$

例 6 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值，求参数 λ 的极大似然估计.

解 似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i\,!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right)=\frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i\,!)}\mathrm{e}^{-n\lambda},$$

取对数得

$$\ln[L(\lambda)]=(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln\lambda-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i\,!),$$

故似然方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[\ln L(\lambda)]=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0,$$

解得 λ 的极大似然估计值为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}.$$

极大似然估计量为

$$\hat{\lambda}=\overline{X}.$$

例 7 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为取自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本．求参数 μ,σ^2 的极大似然估计．

解 由题意可知，X 的概率密度为

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right].$$

样本的似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right]=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right],$$

对似然函数取对数得

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

则似然方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0,\end{cases}$$

解得

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x},\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.$$

量为

$$\hat{\mu}=\overline{X},$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{n-1}{n}S^2.$$

σ^2的严格单调函数，根据上述提示（3）知，标准差σ的极大似然

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\hat{\sigma}^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}=\sqrt{\frac{n-1}{n}S^2}.$$

统计估计除了上面介绍的矩估计法和极大似然估计法外，还有贝叶斯法、顺序统计量法等，后者在社会经济领域中用得很多；但比较而言，本节介绍的这两种方法更为常用，也更为基本.

6.2 估计量的评价标准

由上节可知，对于总体X的同一参数，用不同的估计方法求出的估计量可能不相同，而且即使用相同的方法也可能得到不同的估计量. 也就是说，同一参数可能有多种不同的估计量. 原则上来说，任何统计量都可以作为未知参数的估计量. 那么到底采用哪个估计量较好呢？确定估计量好坏必须在大量观察的基础上从统计的意义来评价，即估计量的好坏取决于估计量的统计性质.

设总体未知参数θ的估计量为$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，很自然地，我们认为一个“好”的估计量应该由**无偏性**、**有效性**、**一致性**的标准来衡量. 下面就这三条性质分别予以介绍.

6.2.1 无偏性

$\hat{\theta}$与被估计参数θ的真值越近越好. 由于$\hat{\theta}$是随机变量，它有一定的波动性，因此只能在统计的意义上要求$\hat{\theta}$的平均值离θ的真值越近越好，最好是能满足所有加权和为零，即没有系统误差，公式为$E(\hat{\theta})=\theta$，这就是无偏性的要求. 为此，引入了如下无偏性的概念.

定义1 设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是未知参数$\theta$的估计量. 若

$$E(\hat{\theta})=\theta, \tag{6-3}$$

则称$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是$\theta$的**无偏估计量**.

$E(\hat{\theta})-\theta$称为估计量$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的**系统误差**. 有系统误差的估计称为**有偏估**

计．因此，无偏估计的实际意义就是无系统误差．显然，样本均值 $\overline{X}$ 、样本方差 S^2 分别是总体均值 μ 、总体方差 σ^2 的无偏估计．

例 1　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自有有限数学期望 μ 和方差 σ^2 的总体．证明：

（1）$\hat{\mu}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是总体均值 μ 的无偏估计量；

（2）$\hat{\sigma}^2=S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 是总体方差 σ^2 的无偏估计量．

证明　（1）由于 $E(X_i)=\mu\,(i=1,2,\cdots,n)$，因此

$$E(\hat{\mu})=E(\overline{X})=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu .$$

由无偏估计量的定义可知，$\hat{\mu}=\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计量．

（2）由于 $D(X_i)=\sigma^2$，$D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$，所以

$$E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\sigma^2+\mu^2 ,$$

$$E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2 .$$

因此

$$\begin{aligned}
E(\hat{\sigma}^2)=E(S^2)&=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)\\
&=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)\right]\\
&=\frac{1}{n-1}\left[n(\sigma^2+\mu^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]\\
&=\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\right)\\
&=\sigma^2 .
\end{aligned}$$

由无偏估计量的定义可知，$\hat{\sigma}^2=S^2$ 是 σ^2 的无偏估计量．

6.2.2　有效性

$\hat{\theta}$ 围绕 θ 的真值波动幅度越小越好．下面我们将会看到，同一个参数满足无偏性要求的估计值往往也不止一个．无偏性只对估计量波动的平均值提出了要求，但是对波动的“振幅”（即估计量的方差）没有提出进一步的要求．当然，我们希望估计量方差尽可能小．这就是无偏估计量的有效性要求．为此，引入了如下有效性的概念．

定义 2　设 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 均是未知参数 θ 的无偏估计量．若

$$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)\,, \tag{6-4}$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

由有效性的定义容易看出，在 θ 的无偏估计量中，方差越小者越有效.

例 2 设 X_1, X_2 来自具有有限数学期望 μ 和方差 σ^2 的总体，μ_1, μ_2, μ_3 皆为 μ 的估计量，试问：以下哪个估计量较好？

（1）$\mu_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$；（2）$\mu_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$；（3）$\mu_3 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$.

解 $E(\mu_1) = E\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu$；

$$E(\mu_2) = E\left(\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2\right) = \frac{1}{3}E(X_1) + \frac{2}{3}E(X_2) = \frac{1}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu = \mu\,;$$

$$E(\mu_3) = E\left(\frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2\right) = \frac{1}{4}E(X_1) + \frac{3}{4}E(X_2) = \frac{1}{4}\mu + \frac{3}{4}\mu = \mu\,.$$

因为估计量 μ_1, μ_2, μ_3 都为 μ 的无偏估计，故比较 μ_1, μ_2, μ_3 的方差：

$$D(\mu_1) = D\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right) = \frac{1}{4}D(X_1) + \frac{1}{4}D(X_2) = \frac{1}{2}D(X) = \frac{1}{2}\sigma^2\,;$$

$$D(\mu_2) = D\left(\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2\right) = \frac{1}{9}D(X_1) + \frac{4}{9}D(X_2) = \frac{5}{9}D(X) = \frac{5}{9}\sigma^2\,;$$

$$D(\mu_3) = D\left(\frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2\right) = \frac{1}{16}D(X_1) + \frac{9}{16}D(X_2) = \frac{5}{8}D(X) = \frac{5}{8}\sigma^2\,.$$

由于 $D(\mu_1) < D(\mu_2) < D(\mu_3)$，根据有效性的定义可知，估计量 μ_1 比较有效.

6.2.3 一致性

当样本容量越来越大时，$\hat{\theta}$ 靠近 θ 真值的可能性也应该越来越大，最好是当样本容量趋于无穷时，$\hat{\theta}$ 在概率的意义上收敛于 θ 的真值. 这就是一致性的要求. 为此，引入了如下一致性的概念.

定义 3 设 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的估计量. 若对于任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1 \tag{6-5}$$

恒成立，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**一致估计量**.

估计量的一致性是对于极限性质而言的，它只在样本容量 n 较大时才起作用.

例 3 证明：样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值 μ 的一致估计量.

证明 由于样本的个体相互独立且与总体 X 同分布，所以

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu\,.$$

由切比雪夫大数定律知，对于任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\}=1.$$

因此，样本均值$\overline{X}$是总体均值μ的一致估计量.

对于上述三个评价好估计量的标准，在实际问题中难以同时兼顾. 无偏性在直观上比较合理，但并不是每个参数都有无偏估计量；而有效性又要建立在无偏估计量的前提下；用一致性评价估计量好坏时要求样本容量适当大，它的优越性才明显. 因此，应该根据实际情况合理地选择评价标准.

6.3　区间估计

由参数的点估计可知，可以用样本的均值与方差来估计总体的均值与方差. 在有些情况下，这种估计按照一定的判别标准（无偏性、有效性、一致性）是相当好的. 但是有时对总体参数估计不满足于只是一个具体值，而是要估计总体参数落入某一区域，以及参数落入这一区域的概率. 这样的区域通常用区间的形式给出，同时给出此区间包含参数真实值的概率，这种形式的估计称为区间估计.

定义　设总体X的分布函数是$F(x;\theta)$，其中θ是未知参数. 给定$\alpha\,(0<\alpha<1)$，若由样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$确定的两个统计量$\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$满足$P\left\{\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\right\}=1-\alpha$，则称随机区间$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha$的**置信区间**. 其中$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$称为置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间的**置信下限**和**置信上限**，$1-\alpha$称为**置信度**.

α是事前给定的一个比较小的正数，它是指参数估计不准的概率，即参数θ未被区间$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$涵盖的概率，一般取$\alpha=0.05$或$\alpha=0.01$.

例如，设参数θ满足条件$P\{35.72<\theta<53.47\}=96\%$，则参数$\theta$的置信度为96%的置信区间为$(35.72,53.47)$，其中置信下限$\hat{\theta}_1=35.72$，置信上限$\hat{\theta}_2=53.47$.

对于给定的置信度，根据样本来确定未知参数θ的置信区间，称为参数θ的**区间估计**.

求未知参数θ的置信区间的一般步骤如下：

（1）先选择一个合适的估计方法对总体的未知参数θ做出估计，由此估计量出发，构造样本的函数U，要求U的分布已知，且含有待估参数θ，但不含其他未知参数.

（2）对于给定的置信度$1-\alpha$，找到两个常数a,b，使$P\{a<U<b\}=1-\alpha$（当U为

连续型随机变量时，一般取 b 为 U 的 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数，取 a 为 U 的 $1-\frac{\alpha}{2}$ 分位数）.

（3）把不等式“ $a<U<b$ ”变形，使得 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，则区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 就是 θ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

6.4 正态总体均值与方差的区间估计

由于服从正态分布的总体广泛存在，而且很多统计量的极限分布是正态分布，因此，下面专门介绍正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中的参数 μ 和 σ^2 的区间估计.

6.4.1 单正态总体均值与方差的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是正态总体 X 的样本.

1. 正态总体均值 μ 的区间估计

（1）σ^2 已知

由第 5 章统计量的抽样分布定理知

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

因方差 σ^2 已知，于是，对给定置信度 $1-\alpha$ 必存在 $u_{\alpha/2}$，使

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

将上式括号内的不等式作等价变换得

$$P\left\{\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha,$$

即得 μ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \tag{6-6}$$

例 1 现随机地从一批服从正态分布 $N(\mu, 0.02^2)$ 的零件中抽取 16 个，分别测其长度（单位：cm）如下：

2.14，2.10，2.13，2.15，2.13，2.12，2.13，2.10，
2.15，2.12，2.14，2.10，2.13，2.11，2.14，2.11.

估计该批零件的平均长度 μ，并求 μ 的置信度为 95%的置信区间.

解　根据矩估计法得 μ 的矩估计值为

$$\hat{\mu}=\overline{x}=\frac{2.14+2.10+\cdots+2.11}{16}=2.125\ .$$

由题意可知，$\alpha=0.05$，查正态分布表得相应的上侧分位点 $u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$. 又 $\sigma=0.02$，$n=16$，所以

$$\overline{x}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.125-1.96\times\frac{0.02}{4}=2.115\ ,$$

$$\overline{x}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.125+1.96\times\frac{0.02}{4}=2.135\ .$$

故由式（6-6）可得 μ 的置信度为 95%的置信区间为 $(2.115\,,2.135)$.

（2）σ^2 **未知**

由于方差 σ^2 未知，所以不能再像方差已知一样，用 U 的分布导出 μ 的区间估计. 由第 5 章统计量的抽样分布定理知

$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)\ .$$

于是，利用 t 分布可导出方差 σ^2 未知时正态总体的区间估计，给定置信度 $1-\alpha$，则必存在 $t_{\alpha/2}(n-1)$，使

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|<t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha\ ,$$

对上式作等价变换得

$$P\left\{\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha\ .$$

因此，μ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\,,\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right).\qquad(6\text{-}7)$$

例 2　从一批零件中抽取 16 个零件，测得它们的直径（单位：mm）如下：

12.15，12.12，12.01，12.08，12.09，12.16，12.03，12.01，

12.06，12.13，12.07，12.11，12.08，12.01，12.03，12.06.

设这批零件的直径服从正态分布 $N(\mu\,,\sigma^2)$. 求零件直径的均值 μ 对应于置信度为 0.95 的置信区间.

解　因为 σ^2 未知，因此由式（6-7）可知，μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

由题设给定的样本值可得

$$n=16,\quad \overline{x}=12.075,\quad s^2=0.002\,44.$$

当置信度$1-\alpha=0.95$时，$\alpha=0.05$，查t分布表得$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.13$，所以

$$\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=12.075-2.13\times\frac{\sqrt{0.002\,44}}{4}=12.049,$$

$$\overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=12.075+2.13\times\frac{\sqrt{0.002\,44}}{4}=12.101.$$

故所求的置信区间为$(12.049,12.101)$.

2. 正态总体方差σ^2的区间估计

（1）μ已知

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，由于$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)\ (i=1,2,\cdots,n)$，因此

$$\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$$

根据χ^2分布的定义，有

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n).$$

因期望μ已知，于是，给定置信度$1-\alpha$，可在χ^2分布表中查得自由度为n的上侧分位点$\chi^2_{\alpha/2}(n)$及$\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$，使

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\geqslant\chi^2_{\alpha/2}(n)\right\}=\frac{\alpha}{2}$$

和

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\right\}=\frac{\alpha}{2}.$$

于是有

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)<\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2<\chi^2_{\alpha/2}(n)\right\}=1-\alpha.$$

将上式作等价变换得

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}<\sigma^2<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right\}=1-\alpha .$$

因此，正态分布总体在期望μ已知时方差σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right). \tag{6-8}$$

标准差σ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}},\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}}\right). \tag{6-9}$$

例 3　一批钢筋的 20 个样品的屈服点（单位：t/cm^2）为

4.98，5.11，5.20，5.11，5.00，5.35，5.61，4.88，5.27，5.38，

5.46，5.27，5.23，4.96，5.15，4.77，5.35，5.38，5.54，5.20.

设屈服点服从正态分布$N(5.21,\sigma^2)$，求屈服点总体方差σ^2及标准差σ的置信度为95%的置信区间.

解　由题设知，屈服点的期望$\mu=5.21$，样本容量$n=20$．对给定的置信度$1-\alpha=0.95$，即$\alpha=0.05$，查χ^2分布表得

$$\chi^2_{\alpha/2}(n)=\chi^2_{0.025}(20)=34.17，\chi^2_{1-\alpha/2}(n)=\chi^2_{0.975}(20)=9.59 .$$

因此，由式（6-8）可得屈服点总体方差σ^2的置信度为 95%的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-5.21)^2}{34.17},\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-5.21)^2}{9.59}\right),$$

即$(0.027,0.096)$.

同样地，由式（6-9）可得屈服点标准差σ的置信度为 95%的置信区间为$(\sqrt{0.027},\sqrt{0.096})$，即$(0.16,0.31)$.

（2）μ未知

在μ未知的情况下，可以用$\bar{X}$作为μ的估计量，并用$(n-1)S^2$代替$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，根据第 5 章统计量的抽样分布定理知

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1) .$$

同μ已知一样，给定置信度$1-\alpha$，可在χ^2分布表中查得自由度为$n-1$的上侧分位点

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 及 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$，使

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geqslant \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = \frac{\alpha}{2}$$

和

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right\} = \frac{\alpha}{2}.$$

于是有

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha .$$

将上式作等价变换得

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha .$$

因此，正态总体在 μ 未知时方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right). \tag{6-10}$$

标准差 σ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right). \tag{6-11}$$

例 4　从某厂生产的滚珠中随机抽取 10 个，测得滚珠的直径（单位：mm）如下：

14.6，15.0，14.7，15.1，14.9，14.8，15.0，15.1，15.2，14.8.

若滚珠直径服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 且 μ 未知，求滚珠直径方差 σ^2 的置信度为 95%的置信区间.

解　样本方差的观测值为

$$s^2 = 0.037\,3 .$$

根据给定的置信水平 $1-\alpha = 0.95$，可得 $\alpha = 0.05$；自由度 $n-1 = 10-1 = 9$.

查 χ^2 分布表得

$$\chi^2_{0.975}(9) = 2.70，\chi^2_{0.025}(9) = 19.0 .$$

所以，由式（6-10）求得滚珠直径方差 σ^2 置信度为 95%的置信区间为

$$\left(\frac{9\times 0.037\,3}{19.0}, \frac{9\times 0.037\,3}{2.70}\right),$$

即 $(0.0177, 0.1243)$．

6.4.2　双正态总体均值与方差的区间估计

在实际中，常常要对两个对象的同一特征进行比较．下面在正态总体的情形下展开讨论．

设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$；$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是分别来自两个相互独立的正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，$\overline{X}, \overline{Y}, S_1^2, S_2^2$ 分别是两样本的均值和方差，给定置信水平为 $1-\alpha\ (0<\alpha<1)$．下面主要讨论两个总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 和方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计．

1. 两个正态总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计

由样本的独立性可知，$\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 是独立的，所以

$$E(\overline{X}-\overline{Y}) = E(\overline{X}) - E(\overline{Y}) = \mu_1 - \mu_2,$$

$$D(\overline{X}-\overline{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}.$$

因此，$\overline{X}-\overline{Y}$ 服从正态分布 $N\left(\mu_1-\mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}\right)$．$\overline{X}-\overline{Y}$ 经标准化后可得

$$U = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1). \tag{6-12}$$

下面对此分情况进行讨论．

（1）σ_1, σ_2 已知

记 $\eta = \overline{X}-\overline{Y}$，$\mu = \mu_1 - \mu_2$，$\sigma^2 = \dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}$，由上面的讨论可知，$\eta \sim N(\mu, \sigma^2)$，因此，求两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的区间估计就相当于求单个正态总体 η 的参数为 μ 的区间估计．

由于 σ_1, σ_2 都已知，所以 σ 已知，故给定置信度 $1-\alpha$，由式（6-12）知，正态总体 η 的参数为 μ 的区间估计为

$$(\eta - u_{\alpha/2}\sigma, \eta + u_{\alpha/2}\sigma), \tag{6-13}$$

即正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}, \overline{X}-\overline{Y}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right). \tag{6-14}$$

例 5 两台机床加工同一种轴，第一台机床加工的轴的椭圆度 X（单位：mm）服从方差为 $\sigma_1^2=0.025^2$ 的正态分布，第二台机床加工的轴的椭圆度 Y 服从方差为 $\sigma_2^2=0.062^2$ 的正态分布．现分别从两台机床所加工的轴中随机抽取 200 根和 150 根，测量其椭圆度，经计算得：第一台机床：$n_1=200$，$\bar{x}=0.081$；第二台机床：$n_2=150$，$\bar{y}=0.062$．给定置信度为 95%，试求两台机床加工的轴的平均椭圆度之差的置信区间．

解 记第一台机床加工的轴的平均椭圆度为 μ_1，第二台机床加工的轴的平均椭圆度为 μ_2．给定置信水平 $1-\alpha=0.95$ 后，查正态分布表得 $u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$，于是

$$\bar{x}-\bar{y}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\left(0.081-0.062-1.96\sqrt{\frac{0.025^2}{200}+\frac{0.062^2}{150}}\right)=0.008\,5\,,$$

$$\bar{x}-\bar{y}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\left(0.081-0.062+1.96\sqrt{\frac{0.025^2}{200}+\frac{0.062^2}{150}}\right)=0.029\,5\,.$$

故由式（6-14）得两台机床加工的轴的平均椭圆度之差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 95%的置信区间为 $(0.008\,5\,,0.029\,5)$．

（2）$\sigma_1\,,\sigma_2$ 未知，且 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$

由式（6-12）可知，$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim N(0,1)$ 分布，但若 σ^2 未知，这时该怎么样构造统计量呢？

根据统计量的抽样分布定理知

$$t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)\,.$$

故给定置信度 $1-\alpha$，由式（6-7）得正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{\alpha/2}(m+n-2)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}S_\omega\,,\overline{X}-\overline{Y}+t_{\alpha/2}(m+n-2)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}S_\omega\right),\qquad(6\text{-}15)$$

其中，$S_\omega=\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}$．

例 6 某公司利用两条自动化流水线灌装矿泉水，现从生产线上分别随机抽取样本 $X_1\,,X_2\,,\cdots,X_{12}$ 和 $Y_1\,,Y_2\,,\cdots,Y_{17}$，测量每瓶所装矿泉水的体积（单位：mL)．计算得到样本均值 $\bar{x}=501.1$，$\bar{y}=499.7$，样本方差 $s_1^2=2.4$，$s_2^2=4.7$，设这两条流水线所装的矿泉水体积 $X\,,Y$ 都服从正态分布，分别为 $N(\mu_1\,,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2\,,\sigma^2)$．求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95

的置信区间.

解　由题意，σ_1, σ_2 未知，但 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$，$m=12$，$n=17$，$s_1^2=2.4$，$s_2^2=4.7$．由此可计算得

$$s_\omega=\sqrt{\frac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}}=\sqrt{\frac{11\times 2.4+16\times 4.7}{12+17-2}}=1.940 .$$

由于 $1-\alpha=0.95$，查 t 分布表得 $t_{\alpha/2}(27)=t_{0.025}(27)=2.05$，于是

$$\bar{x}-\bar{y}-t_{\alpha/2}(m+n-2)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}s_\omega=501.1-499.7-2.05\times\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{17}}\times 1.940=-0.101 ,$$

$$\bar{x}-\bar{y}+t_{\alpha/2}(m+n-2)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}s_\omega=501.1-499.7+2.05\times\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{17}}\times 1.940=2.901 .$$

故由式（6-15）得 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(-0.101, 2.901)$．

（3）σ_1, σ_2 未知，且 $\sigma_1\neq\sigma_2$，但容量 m, n 很大（大于 50）

这时可用估计量 $S_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2$ 来近似代替 σ_1^2，用估计量 $S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$ 来近似代替 σ_2^2，于是这与 σ_1, σ_2 已知时的情况一样，由式（6-14）可知，正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{m}+\frac{S_2^2}{n}}\ ,\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{m}+\frac{S_2^2}{n}}\right). \tag{6-16}$$

2. 两个正态总体方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计

设两个独立正态总体为 $X\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，其中 $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$ 均未知．现分别取总体 X 和 Y 的两个样本 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$，下面考虑在这种情况下方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计问题.

（1）μ_1, μ_2 已知

由 χ^2 分布的定义可得

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(m),\quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n) ,$$

并且它们之间相互独立，所以

$$F=\frac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F(m,n).$$

给定置信度$1-\alpha$，则存在$F_{1-\alpha/2}(m,n)$，$F_{\alpha/2}(m,n)$，使

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(m,n)<\frac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}<F_{\alpha/2}(m,n)\right\}=1-\alpha,$$

整理得

$$P\left\{\frac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(m,n)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m,n)}\right\}=1-\alpha.$$

因此，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(m,n)},\ \frac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m,n)}\right),\tag{6-17}$$

或

$$\left(\frac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}\cdot F_{1-\alpha/2}(n,m),\ \frac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}\cdot F_{\alpha/2}(n,m)\right).\tag{6-18}$$

同理可得，$\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n,m)},\ \frac{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n,m)}\right),\tag{6-19}$$

或

$$\left(\frac{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}\cdot F_{1-\alpha/2}(m,n),\ \frac{m\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}\cdot F_{\alpha/2}(m,n)\right).\tag{6-20}$$

（2）μ_1，μ_2 未知

根据统计量抽样分布定理知

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1).$$

给定置信度$1-\alpha$，则存在$F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)$，$F_{\alpha/2}(m-1,n-1)$，使

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)<\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}<F_{\alpha/2}(m-1,n-1)\right\}=1-\alpha,$$

整理得

$$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}\right\}=1-\alpha.$$

因此，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}\right),\tag{6-21}$$

或

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1),\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{\alpha/2}(n-1,m-1)\right).\tag{6-22}$$

同理可得，$\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{S_2^2}{S_1^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n-1,m-1)},\ \frac{S_2^2}{S_1^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1)}\right),\tag{6-23}$$

或

$$\left(\frac{S_2^2}{S_1^2}\cdot F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1),\ \frac{S_2^2}{S_1^2}\cdot F_{\alpha/2}(m-1,n-1)\right).\tag{6-24}$$

例 7　某自动机床加工同类型套筒，假设套筒的直径服从正态分布．现在从 A 和 B 两个不同班次的产品中各抽取了 5 个套筒，测量它们的直径，得如下数据（单位：mm）：

A 班：2.066，2.063，2.068，2.060，2.067；

B 班：2.058，2.057，2.063，2.059，2.060．

试求两个班所加工套筒直径的方差之比$\dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$的置信度为 0.90 的置信区间．

解　由于两个班所加工套筒直径的均值未知，由式（6-21）知两个班所加工套筒直径的方差之比$\dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{S_A^2}{S_B^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)},\ \frac{S_A^2}{S_B^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}\right).$$

由题意，$1-\alpha=0.90$，$m-1=5-1=4$，$n-1=5-1=4$，查 F 分布表得

$$F_{\alpha/2}(m-1,n-1)=F_{0.05}(4,4)=6.39,$$

$$F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)=F_{0.95}(4,4)=\frac{1}{F_{0.05}(4,4)}=\frac{1}{6.39}.$$

又由已知数据计算得

$$s_A^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\overline{x})^2=0.000\,010\,7;$$

$$s_B^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=0.000\,005\,3.$$

因此，方差之比 $\dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$ 的置信度为 0.90 的置信区间为

$$\left(\frac{0.000\,010\,7}{6.39\times 0.000\,005\,3},\frac{0.000\,010\,7}{0.000\,005\,3/6.39}\right),$$

即 $(0.315\,9,12.9)$．

6.5 单侧置信区间

在前面的讨论中，我们所求的未知参数 θ 的置信区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 都是双侧的．然而，在解决某些问题时，我们可能不是同时关心它们的“上限”和“下限”，即有时“上限”和“下限”的重要性是不对称的，我们可能只关心某一个界限．因此，在某些问题中，只需要讨论单侧置信上限或下限就可以了．例如，对于产品的寿命，就平均寿命这个参数而言，由于寿命越长越好，当然重要的只是“下限”；又如，对于次品率来说，当然希望次品率越低越好，我们关心的是一批产品次品率 p 的“上限”．由此实际背景，我们引进单侧置信区间的概念．

定义 设总体 X 的分布函数是 $F(x;\theta)$，其中 θ 是未知参数；又设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体的一个样本．对给定的值 $\alpha\,(0<\alpha<1)$，若统计量 $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 满足

$$P\{\theta>\hat{\theta}_1\}=1-\alpha,\tag{6-25}$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1,+\infty)$ 为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的**单侧置信区间**，并称 $\hat{\theta}_1$ 为置信度为 $1-\alpha$ 的**单侧置信下限**；若统计量 $\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 满足

$$P\{\theta<\hat{\theta}_2\}=1-\alpha,\tag{6-26}$$

则称随机区间 $(-\infty,\hat{\theta}_2)$ 为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的**单侧置信区间**，并称 $\hat{\theta}_2$ 为置信度为 $1-\alpha$ 的**单侧置信上限**．

至于求单侧置信区间的步骤，只需将 6.3 中求置信区间的第二步按要求定出 a,b 中的

一个，第三步略改即可.

例　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，且 σ^2 已知，μ 未知．求 μ 的置信度为 $1-\alpha\ (0<\alpha<1)$ 的单侧置信下限.

解　根据统计量的定理知

$$U = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

于是，对给定置信度 $1-\alpha$，存在 u_α 使

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < u_\alpha\right\} = 1-\alpha,$$

即

$$P\left\{\mu > \overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right\} = 1-\alpha.$$

所以，μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为 $\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha$．将上例所求得的单侧置信下限 $\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha$ 与同一置信度的双侧置信区间的置信下限 $\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$ 比较发现，只是 $\frac{\alpha}{2}$ 与 α 的差别．此种规则对前面介绍的各种条件下的正态总体都适用，即只需将双侧置信区间的置信上（或下）限中的 $\frac{\alpha}{2}$ 换成 α，就是相应条件下相应参数的同一置信度的单侧置信区间上限或下限.

习题 6

1．设总体 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $\theta>0$．试求：

（1）θ 的矩估计；（2）θ 的极大似然估计.

2．设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的一个样本，试确定常数 C，使 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计.

3．设 X 表示某种型号的电子元件的寿命（以小时计），它服从指数分布，其概率密度为 $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\ (x>0)$，其中 $\theta>0$ 为未知参数．现得样本值为：

168，130，169，143，174，198，108，212，252.

试估计未知参数θ.

4．对某一距离进行了5次测量，其测量结果（单位：m）如下：2 781，2 836，2 807，2 765，2 858．已知测量结果服从$N(\mu,\sigma^2)$，求参数μ和σ^2的矩估计值．

5．某车间生产滚珠，从长期实践中知道滚珠直径X可以认为服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，且滚珠直径的方差为$\sigma^2=0.06$．从某天生产的产品中随机抽取6个，量得直径（单位：mm）如下：

14.6，15.1，14.9，14.8，15.2，15.1．

当$\alpha=0.05$时，求滚珠平均直径的区间估计．

6．某旅行社随机访问了25名旅游者，得知平均消费额$\bar{x}=80$元，样本标准差$s=12$元．已知旅游者消费额服从正态分布，求旅游者平均消费额μ的置信度为95%的置信区间．

7．从一批零件中，抽取9个零件，测得其直径（单位：mm）为：

19.7，20.1，19.8，19.9，20.2，20.0，19.9，20.2，20.3．

设零件直径$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且已知$\sigma=0.21\,\text{mm}$，求这批零件直径的均值μ对应于置信度为0.95的置信区间．

8．从一批零件中，抽取9个零件，测得其直径（单位：mm）为：

19.7，20.1，19.8，19.9，20.2，20.0，19.9，20.2，20.3．

设零件直径$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且μ未知，求这批零件直径的方差σ^2对应于置信度为0.95的置信区间．

9．设A,B两个地区种植同一型号的小麦，现抽取了19块面积相同的麦田，其中9块属于地区A，另外10块属于地区B，测得它们的小麦产量（以kg计）分别如下：

地区A：100，105，110，125，110，98，105，116，112；

地区B：101，100，105，115，111，107，106，121，102，92．

设地区A的小麦产量$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，地区B的小麦产量$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，μ_1,μ_2,σ^2均未知．试求这两个地区小麦的平均产量之差$\mu_1-\mu_2$的置信度为90%的置信区间．

10．设A和B两批导线是用不同工艺生产的，今随机地从每批导线中抽取5根电阻进行测量，算得$s_1^2=s_A^2=1.07\times10^{-7}$，$s_2^2=s_B^2=5.3\times10^{-6}$．若$A$批导线的电阻服从$N(\mu_1,\sigma_1^2)$分布，$B$批导线的电阻服从$N(\mu_2,\sigma_2^2)$分布，求$\sigma_1^2/\sigma_2^2$的置信度为0.90的置信区间．

11．从汽车轮胎厂生产的某种轮胎中抽取10个样品进行磨损试验，直至轮胎行驶到磨坏为止，测得它们的行驶路程（km）如下：

41 250，41 010，42 650，38 970，40 200，

42 550，43 500，40 400，41 870，39 800．

设汽车轮胎行驶路程服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，求：

（1）μ的置信水平为95%的单侧置信下限；

（2）σ的置信水平为95%的单侧置信上限．

第 7 章 假设检验

第 6 章讨论了参数估计问题，即对样本进行适当加工，以推断出参数的估计值和置信区间．而检验假设是先假设总体具有某种特征（如总体的参数值），然后再对样本进行加工，即构造一个检验统计量，推断所作假设是否合理，以对所提出的假设作出是接受还是拒绝的决策．

7.1 假设检验的基础知识

7.1.1 假设检验的引入

下面，我们先结合具体的例子来说明假设检验所要解决的问题．

例 1 用一台包装机包装大米．设每一袋大米的质量是一个随机变量，且已知它服从正态分布．当包装机正常工作时，平均每袋大米的质量为 50 kg，标准差为 0.5 kg．现随机抽取该包装机包装的 12 袋大米，称得其质量（单位：kg）分别为

49.6，48.8，51.3，49.4，49.3，48.5，

50.2，48.9，49.1，48.5，50.2，50.1．

试问这台包装机工作是否正常？

分析 每袋大米的质量 $X \sim N(50, 0.5^2)$，经计算 12 袋大米的平均质量为

$$\overline{x} = 49.492,$$

即 $\overline{x} \neq \mu_0$ $(\mu_0 = 50)$ 则可能有以下两种情况：

（1）包装机工作正常，但由于抽样的随机性导致样本均值与总体均值有一定差异，这种误差属于正常的随机波动；

（2）包装机工作异常，导致样本均值小于总体均值，这种误差属于系统误差．

我们需要判断以上两种假设哪种正确，并给出判断的理由．下面再看一个例子．

例 2 设甲、乙两个车间生产的灯泡的寿命均服从正态分布．现从两个车间分别抽取 20 个和 25 个灯泡，测得其寿命并得到以下数据：

$$\text{甲车间：} n_1 = 20, \overline{x} = 1\,520\ \text{h}, s_1 = 72\ \text{h},$$

$$\text{乙车间：} n_2 = 25, \overline{y} = 1\,512\ \text{h}, s_2 = 81\ \text{h}.$$

试问这两个车间生产的灯泡的寿命可以认为是相同的吗？

分析 我们希望知道，甲、乙车间的两个样本的均值和方差的差异是属于正常的随机误差，还是属于系统误差？如何判断？判断的准则是什么？

以上两个例子都属于参数检验问题．另外，还有非参数检验问题，如关于总体服从哪种分布（如正态分布、泊松分布）的假设检验．

定义 1 **假设检验**是指先对总体分布函数的类型或分布的某些参数作出某种可能的假设，然后再根据所得的样本数据对假设的正确性作出判断的过程．

例 1 中以 μ,σ 分别表示袋装大米的质量总体 X 的均值和标准差．由于长期实践表明标准差比较稳定，故设 $\sigma=0.5$．这里 μ 未知，为了根据样本值来判断 $\mu=50$ 还是 $\mu\neq 50$，我们提出两个相互对立的假设，即

$$H_0:\ \mu=\mu_0=50,\quad H_1:\ \mu\neq\mu_0 .$$

然后，我们再给出一个合理的法则，根据这一法则，利用已知样本作出决策，即是接受假设 H_0（即拒绝假设 H_1），还是拒绝假设 H_0（即接受假设 H_1）．如果作出的决策是接受 H_0，则认为 $\mu=\mu_0$，即认为机器工作是正常的，否则认为机器工作是不正常的．

在统计学上，我们把对总体 X 分布（包括分布类型、分布参数）的各种论断的统计假设称为**原假设**（或**零假设**），记为 H_0，把假设的对立面称为**对立假设**（或**备择假设**），记为 H_1．

统计假设提出后，我们关心的是它的真伪．假设检验就是根据来自总体的样本，按照一定的规则对原假设 H_0 作出判断，即是接受还是拒绝，这个用来对假设作出判断的规则称为**检验准则**，简称**检验**．那么，如何对提出的假设进行检验呢？下面来说明假设检验的基本思想和做法．

7.1.2 判断“假设”的依据

究竟是接受还是拒绝原假设，通常根据所谓的小概率原理来确定．

例 1 中，如何检验 H_0：$\mu=50$ 是否成立呢？我们知道，样本均值 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计，自然希望用 $\overline{X}$ 这一统计量来进行判断．在 H_0 为真的条件下，$\overline{X}$ 的观测值 $\bar{x}$ 应在 50 附近，即 $|\bar{x}-50|$ 一般不应太大．若 $|\bar{x}-50|$ 较大，我们就怀疑假设 H_0 的正确性而拒绝 H_0．当 H_0 为真时，

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

衡量$|\bar{x}-50|$的大小可归结为衡量$\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|$的大小．也就是说，要选取一个适当的常数$k$，使得$\left|\dfrac{\bar{x}-50}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geqslant k$是一个小概率事件．当$\bar{x}$满足$\left|\dfrac{\bar{x}-50}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geqslant k$时，拒绝$H_0$；反之，若$\left|\dfrac{\bar{x}-50}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<k$，接受$H_0$．

定义 2 原假设被拒绝的样本观测值所在区域称为**拒绝域**，也称**临界域**．它是样本空间的一个子集，用W表示，而它的补集称为**接受域**．

当拒绝域确定了，检验的判断准则也就确定了．如果$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in W$，则认为$H_0$不成立；如果$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\notin W$，则认为$H_0$成立．由此可见，一个拒绝域$W$唯一确定一个检验法则；反之，一个检验法则也唯一确定一个拒绝域．

定义 3 **小概率原理**是指小概率事件（或概率很小的事件）在一次试验（或观察）中几乎是不可能发生的．

小概率原理体现了“反证法”的思想．如设某个假设H_0需要检验，先假定H_0正确，在此“假定”下，构造一个小概率事件A（即在H_0正确的条件下概率$P\{A|H_0\}$很小），再根据给出的条件，检验小概率事件A在一次试验中是否发生．如果事件A发生，则与小概率事件几乎不发生相矛盾，就有理由怀疑该假设H_0的真实性，而拒绝这一假设．

7.1.3 两类错误

在假设检验中，根据样本中所含信息可以作出是接受H_0还是拒绝H_0的判断，但由于样本的随机性，这样作出的判断可能会犯错误．

当原假设H_0为真时，却作出拒绝H_0的判断，此类错误称为**第一类错误**（或**弃真错误**）．犯第一类错误的可能性可由条件概率

$$P\{\text{拒绝}H_0\,|\,H_0\text{为真}\}=\alpha \tag{7-1}$$

来描述，称之为**犯第一类错误的概率**，或**弃真概率**．

当原假设H_0为假时，却作出接受H_0的判断，此类错误称为**第二类错误**（或**取伪错误**）．犯第二类错误的可能性可由条件概率

$$P\{\text{接受}H_0\,|\,H_0\text{为假}\}=\beta \tag{7-2}$$

来描述，称之为**犯第二类错误的概率**，或**取伪概率**．

以上两类错误的概率如表 7-1 所示．

表 7-1

所做判断 / 真实情况	接受原假设 H_0	接受备择假设 H_1
原假设 H_0 为真	正确（$1-\alpha$）	第一类错误（α）
原假设 H_0 为假	第二类错误（β）	正确（$1-\beta$）

例 1 中，为了确定常数k，我们考虑统计量$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，由于允许犯第一类错误的概率为$\alpha$，即

$$P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\}=P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geqslant k\right\}=\alpha,$$

当H_0为真时，

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

由标准正态分布分位点的定义得$k=u_{\alpha/2}$．因而，若U的观测值满足

$$|u|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geqslant k=u_{\alpha/2},$$

则称$\overline{x}$与μ_0的差异是显著的，这时拒绝H_0；反之，若U的观测值满足

$$|u|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<k=u_{\alpha/2},$$

则称$\overline{x}$与μ_0的差异是不显著的，这时接受H_0．数α**称为显著性水平**．

若取$\alpha=0.05$，则有$k=u_{0.05/2}=u_{0.025}=1.96$．由已知$n=12,\sigma=0.5$，以及计算得到$\overline{x}=49.492$，则

$$\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\approx 3.52>1.96,$$

于是拒绝H_0，即认为这天包装机工作不正常．

注意

一个优良的假设检验准则应该使犯两类错误的概率 α, β 都尽可能小，但事实上这两类错误是对立的. 当样本容量固定时，犯两类错误的概率不可能同时减小，若减小其中一个，另一个就会增大. 如果要同时减小犯两类错误的概率，则必须增加样本容量.

试验者作出的判断完全取决于其犯两类错误的意愿. 通常，原假设是在前期充分调查研究后才作出的，是比较重要的假设，需要保护，而试验者将犯第一类错误的概率控制在一个小概率范围内就体现了这种保护. 这种只对犯第一类错误的概率加以控制，而不考虑犯第二类错误的概率的检验，称为**显著性检验**.

设正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ 已知，μ 只能取 μ_0 或 $\mu_1 (\mu_0 < \mu_1)$. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自该总体的一个简单随机样本，现需检验假设

$$H_0:\ \mu = \mu_0,\ H_1:\ \mu = \mu_1 .$$

已知样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是总体均值 μ 的一个估计，且 $\mu_0 < \mu_1$，当 $\overline{X}$ 过分偏大（或者说 $\overline{X} - \mu_0$ 过分偏大）时，则说明 H_0 为假，因此其拒绝域为 $\overline{X} \geqslant C$，即犯第一类错误的概率为

$$\alpha = P\{\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}\} = P\{\overline{X} \geqslant C \mid \mu = \mu_0\} = P\left\{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geqslant \frac{C - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu = \mu_0\right\}.$$

而当 H_0 为真时，即 $\mu = \mu_0$，$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，由此，

$$\alpha = 1 - \Phi\left(\frac{(C - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma_0}\right),$$

从而 $\dfrac{(C - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma_0} = u_\alpha$，$C = \mu_0 + \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_\alpha$. 犯第二类错误的概率为

$$\beta = P\{\text{接受}H_0 \mid H_1\text{为真}\} = P\{\overline{X} < C \mid \mu = \mu_1\} = P\left\{\frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{C - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu = \mu_1\right\}.$$

而当 H_1 为真时，即

$$\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

由此，

$$\beta = \Phi\left(\frac{C-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(u_\alpha - \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right).$$

当α减小时，u_α增大，$u_\alpha - \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$也增大，从而$\beta$增大；反之，若减小$\beta$，则$u_\alpha - \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$也随着减少，$u_\alpha$减小，从而$\alpha = 1-\Phi(u_\alpha)$增大．可见，在样本容量$n$固定的情况下，要同时减小$\alpha$和$\beta$是不可能的．

但若允许样本容量n变化，则同时减小α和β是可能的．由正态分布的对称性可知：$u_\beta = -\left(u_\alpha - \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$，即$u_\alpha + u_\beta = \frac{(\mu_1-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma_0}$．因此若使$n$增加，可知$u_\alpha, u_\beta$同时增加，即$\alpha$和$\beta$同时减小．另外，若给定$\alpha$或$\beta$其中之一，通过增加$n$，可减小犯另一类错误的概率．

注 意

（1）$\alpha+\beta$一般不为 1.

（2）通常把在$\alpha=0.05$时拒绝H_0称为“显著”的（实际情况“显著”异于H_0）；把在$\alpha=0.01$时拒绝H_0称为“高度显著”的．

7.1.4 假设检验的步骤

一般地，假设检验可分为以下五个步骤．

（1）根据要检验的问题提出原假设H_0和对立假设H_1；

（2）在原假设H_0成立的条件下，确定检验统计量；

（3）在给定的显著水平α下，确定拒绝域；

（4）根据样本观测值$x_1, x_2, \cdots, x_n$，计算统计量的观测值；

（5）若统计量的观测值落在拒绝域内，则拒绝原假设H_0而接受对立假设H_1；反之，若统计量的观测值落在接受域，则接受H_0而拒绝H_1．

在对参数θ的假设检验中，形如H_0：$\theta=\theta_0$，H_1：$\theta\neq\theta_0$的假设检验称为**双边检验**．在实际问题中，有些被检验的参数，如电子元件的寿命越大越好，而一些指标如原材

料的消耗越低越好，因此，需要讨论以下形式的假设检验

$$H_0: \theta \leqslant \theta_0, \ H_1: \theta > \theta_0, \tag{7-3}$$

或

$$H_0: \theta \geqslant \theta_0, \ H_1: \theta < \theta_0. \tag{7-4}$$

式（7-3）称为**右边检验**，式（7-4）称为**左边检验**；左边检验和右边检验统称为**单边检验**.

7.2　正态总体均值的假设检验

7.2.1　单个正态总体均值的假设检验

1. 方差已知时单个正态总体均值的检验

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，且方差 σ^2 已知．当 H_0 为真时，选取检验统计量

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

其中，μ_0 已知．在给定的显著性水平 α 下，可以得到以下检验问题的拒绝域（如表 7-2 所示）．此种检验方法称为 U **检验法**.

表 7-2

原假设 H_0	检验统计量	对立假设 H_1	拒绝域
$\mu \leqslant \mu_0$	$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$	$\{u \mid u \geqslant u_\alpha\}$
$\mu \geqslant \mu_0$		$\mu < \mu_0$	$\{u \mid u \leqslant -u_\alpha\}$
$\mu = \mu_0$		$\mu \neq \mu_0$	$\{u \mid \lvert u \rvert \geqslant u_{\alpha/2}\}$

例 1　某公司生产某种型号的电池，假定其寿命服从正态分布 $N(\mu, 3^2)$．该公司声称：该型号电池的平均寿命不低于 21.5 h．实验室检测了该公司生产的 9 只电池，得知它们的平均寿命为 20 h．问试验结果是否表明该型号电池的平均寿命比该公司宣布的更短？（取 $\alpha = 0.05$．）

解　依题意，建立假设

$$H_0: \mu \geqslant 21.5, \ H_1: \mu < 21.5.$$

由于 σ^2 已知，故取统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

当 $\alpha=0.05$ 时，查表得 $u_{0.05}=1.65$，故拒绝域为

$$W=\left\{u\,|\,u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant -u_{0.05}=-1.65\right\},$$

已知 $\overline{x}=20, n=9, \sigma=3$，则有

$$u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{20-21.5}{3/\sqrt{9}}=-1.5>-1.65,$$

即 u 没有落在拒绝域内，此时接受原假设 H_0，即该型号电池的平均寿命不低于 21.5 h，试验结果表明电池寿命不比该公司宣称的短.

例 2　上海 76 年间 7 月平均气温的平均值为 27.2℃，均方差 $\sigma=1.09$，为绘制 7 月平均气温等温线图，试以显著性水平 $\alpha=0.05$ 来检验 27.0℃ 等温线通过上海是否可信？

解　检验 27.0℃ 等温线通过上海是否可信，即检验上海 7 月平均气温是否等于 27.0℃．建立假设

$$H_0:\ \mu=\mu_0=27.0,\ H_1:\ \mu\neq\mu_0,$$

由于 $\sigma=1.09$ 已知，故取统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

因给定的显著性水平 $\alpha=0.05$，且为双边检验，查正态分布表得 $u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$，故取拒绝域

$$W=\left\{u\,|\,|u|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geqslant u_{0.025}=1.96\right\}.$$

已知 $\overline{x}=27.2, \sigma=1.09, \mu_0=27.0, n=76$，则有

$$|u|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{27.2-27.0}{1.09/\sqrt{76}}\right|\approx 1.60<1.96,$$

即 u 不在拒绝域内，此时接受原假设 H_0，故在 $\alpha=0.05$ 的显著性水平上，可认为上海 7 月平均气温等于 27.0℃．

2. 方差未知时单个正态总体均值的检验

在实际问题中，方差已知的情况比较少见，更多的情况是已知总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，而方差 σ^2 未知，我们自然想到用无偏估计 S^2 来代替 σ^2，构造检验统计量

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)\ . \tag{7-5}$$

现考虑假设

$$H_0:\ \mu=\mu_0,\ H_1:\ \mu\neq\mu_0,$$

对于给定的显著性水平α，有

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=\alpha\ . \tag{7-6}$$

因此，检验的拒绝域为

$$W=\left\{t\,\middle|\,|t|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)\right\}. \tag{7-7}$$

当检验统计量t的观测值$t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$满足$|t|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$，则拒绝原假设$H_0$，即认为均值$\mu$与$\mu_0$有显著差异；否则接受$H_0$，即认为$\mu$与$\mu_0$无显著差异.

类似地，假设检验H_0：$\mu\geqslant\mu_0$，H_1：$\mu<\mu_0$的拒绝域为

$$W=\{t\mid t\leqslant -t_\alpha(n-1)\}; \tag{7-8}$$

假设检验H_0：$\mu\leqslant\mu_0$，H_1：$\mu>\mu_0$的拒绝域为

$$W=\{t\mid t\geqslant t_\alpha(n-1)\}\ . \tag{7-9}$$

上述检验方法称为t**检验法**，检验的拒绝域如表 7-3 所示.

表 7-3

原假设 H_0	检验统计量	对立假设 H_1	拒绝域
$\mu\leqslant\mu_0$	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$	$\{t\mid t\geqslant t_\alpha(n-1)\}$
$\mu\geqslant\mu_0$		$\mu<\mu_0$	$\{t\mid t\leqslant -t_\alpha(n-1)\}$
$\mu=\mu_0$		$\mu\neq\mu_0$	$\{t\mid \|t\|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)\}$

例 3　健康成年男子的平均脉搏为 72 次/分，高考体检时，某校参加体检的 26 名男生的平均脉搏为 74.2 次/分，标准差为 6.2 次/分，问这 26 名男生每分钟脉搏次数与健康成年男子有无显著差异（$\alpha=0.05$）？

解　依题意，建立假设

$$H_0:\ \mu=\mu_0=72,\ H_1:\ \mu\neq 72\ .$$

由于σ^2未知，故选取统计量

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}},$$

已知$\alpha=0.05$，故此检验问题的拒绝域为

$$W=\left\{t\,\middle|\,|t|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)\right\}.$$

又知$n=26$，$\overline{x}=74.2$，$s=6.2$，查表得$t_{\alpha/2}(25)=t_{0.025}(25)\approx 2.06$，则有

$$|t|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{74.2-72}{6.2/\sqrt{26}}\right|\approx 1.81<2.06,$$

即t没有落在拒绝域内，此时接受原假设H_0，故认为这26名男生每分钟脉搏次数与健康成年男子无显著差别.

例4 某厂家断言其所生产的小型电动机在正常负载条件下平均电流不会超过0.8 A，随机抽取该型号电动机16台，发现其平均电流为0.92 A，而通过该样本求出标准差为0.32 A．假定这种电动机的工作电流X服从正态分布，并取显著水平$\alpha=0.05$，问根据这一抽样结果能否否定厂家断言？

解 依题意，建立假设

$$H_0:\ \mu\leqslant 0.8,\ H_1:\ \mu>0.8.$$

由于σ^2未知，取检验统计量

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

已知$\alpha=0.05$，故此检验问题的拒绝域为

$$W=\left\{t\,\middle|\,t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\geqslant t_\alpha(n-1)\right\}.$$

又知$n=16$，$\overline{x}=0.92$，$s=0.32$，查表得$t_{0.05}(16-1)=t_{0.05}(15)\approx 1.75$，则有

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{0.92-0.8}{0.32/\sqrt{16}}=1.50<1.75,$$

即t没有落在拒绝域内，此时接受原假设H_0，故在所给数据和检验水平下，没有充分理由否定厂方的断言.

注 意

（1）由例 4 可知，根据原假设的不同，我们会得出不同的结论，这是因为问题的着眼点不同. 当把"厂家断言正确"作为原假设时，我们是根据该厂以往的表现和信誉，对其断言已有了很大的信任. 只有非常不利于其观察结果，才能改变我们的看法，因而一般很难拒绝这个断言. 反之，当把"厂家断言不正确"作为原假设时，我们一开始就对该厂的产品抱怀疑态度，只有非常有利于该厂的结果，才能改变我们的看法. 因此，在所得的观察数据并非决定性的偏于一方时，我们的着眼点决定了所得的结果.

（2）在假设检验中，为使问题讨论起来更加方便，一般使原假设中带"等号".

例 5 一罐装机向容器中装入货物，装入货物的平均质量为 $\mu=16$ 盎司. 如果装入货物的质量少于应装的质量，则消费者的利益就会受到损失；反之，如果装入货物的质量超过应装的质量，公司的利润就会减少. 为了监控生产过程，质检人员定期随机抽取 8 个容器作为样本，测得质量分别是 16.02，16.22，15.82，15.92，16.22，16.32，16.12，15.92，试问此生产过程是否符合设计要求？（假定罐装货物的总体质量服从正态分布，且给定显著性水平 $\alpha=0.05$.）

解 按题意需检验假设

$$H_0: \ \mu=\mu_0=16, \ H_1: \ \mu\neq 16 .$$

由于 σ^2 未知，故取检验统计量

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

已知 $\alpha=0.05$ ，故拒绝域为

$$W=\left\{t \,\middle|\, |t|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)\right\}.$$

查表得 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(8-1)\approx 2.365$，经计算得

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{128.56}{8}=16.07, \quad s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{0.22}{7}}\approx 0.18,$$

所以

$$|t|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{16.07-16}{0.18/\sqrt{8}}\right|\approx 1.10<2.365,$$

即 t 没有落在拒绝域内，此时接受原假设 H_0 ，故认为此生产过程符合设计要求，可以使

装入容器的货物平均质量为$\mu=16$盎司.

3. 大样本单个正态总体均值的检验

设总体为X，它的分布是任意的，方差σ^2未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的样本，H_0：$\mu=\mu_0$（μ_0已知）. 当样本容量n很大（$n>30$）时，无论总体是否服从正态分布，统计量$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$都近似服从正态分布，即

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

可使用U检验.

例 6 某制药厂生产复合维生素，要求每 50 g 维生素中含铁 2 400 mg，现从某次生产过程中随机抽取 50 份样品，测得铁的平均含量为 2 385.5 mg，标准差为 32.8 mg，问这批产品的平均含铁量是否合格？（取$\alpha=0.05$.）

解 依题意需检验假设

$$H_0:\ \mu=\mu_0=2\,400,\ H_1:\ \mu\neq 2\,400.$$

由于$n=50$是大样本，且总体方差σ^2未知，故采用U检验法，用样本方差S^2代替σ^2，当H_0成立时，有

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

由于$\alpha=0.05$，查表得$u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$，故拒绝域近似为

$$W=\left\{t\,\Big|\,|t|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geqslant u_{\alpha/2}\right\}.$$

已知$\overline{x}=2\,385.5, s=32.8, n=50$，即有

$$|t|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{2\,385.5-2\,400}{32.8/\sqrt{50}}\right|\approx 3.13>1.96.$$

t落在了拒绝域中，故拒绝H_0，即认为这批产品的平均含铁量不合格.

7.2.2 两个正态总体均值的假设检验

1. 方差已知时均值的检验

设两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 是来自总体 X 的样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 是来自总体 Y 的样本，且两样本相互独立．又设两个样本的平均值分别为 $\overline{X}, \overline{Y}$，$\sigma_1^2$ 和 σ_2^2 已知，现需检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2 .$$

由于 X, Y 均为正态分布，且相互独立，所以 $\overline{X} - \overline{Y}$ 也服从正态分布，其平均值为 $\mu_1 - \mu_2$，方差为 $\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$．因此，若假设 H_0 为真，则统计量

$$U = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1) . \tag{7-10}$$

对于给定的显著性水平 α，拒绝域为

$$W = \{u \mid |u| \geqslant u_{\alpha/2}\} .$$

例 7 某药厂生产一种新的止痛片，厂方希望验证服用新药片后至开始起作用的时间间隔比原有止痛片至少缩短一半，因此厂方提出检验假设

$$H_0: \mu_1 \leqslant 2\mu_2, \quad H_1: \mu_1 > 2\mu_2 .$$

其中，μ_1, μ_2 分别是服用原有止痛片和服用新止痛片后至开始起作用的时间间隔的总体均值．设两总体均为正态分布且方差分别为已知值 σ_1^2, σ_2^2．现分别在两总体中取一样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$，两个样本独立．试给出上述假设检验问题的检验统计量及拒绝域．（取显著性水平为 α．）

解 设服用原有止痛片和服用新止痛片后至开始起作用的时间间隔分别为

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$$

因 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是来自 X, Y 的样本，且两个样本独立，故

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right), \quad \overline{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

现假设检验

$$H_0: \mu_1 \leqslant 2\mu_2, \quad H_1: \mu_1 > 2\mu_2 .$$

当 H_0 为真时，有

$$\overline{X}-2\overline{Y}\sim N\left(0,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{4\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

从而统计量

$$U=\frac{\overline{X}-2\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{4\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

由于显著性水平为α，故拒绝域为

$$W=\{u\mid u\geqslant u_\alpha\}.$$

2. 方差未知且相等（$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$）时均值的检验

设两个正态总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$是来自总体$X$的样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$是来自总体$Y$的样本，且两样本相互独立．又设两个样本的平均值分别为$\overline{X},\overline{Y}$，$\sigma_1^2$和$\sigma_2^2$未知且相等，现需检验假设

$$H_0:\ \mu_1=\mu_2,\ H_1:\ \mu_1\neq\mu_2.$$

若假设H_0为真，则检验统计量

$$t=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

其中，$S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$，$S_1^2,S_2^2$分别是$\overline{X},\overline{Y}$的样本方差，且有

$$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2.$$

对于给定的显著性水平α，拒绝域为

$$W=\{t\mid |t|\geqslant t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}.$$

例 8 某气象站 1956 年迁址，1950—1955 年的年平均风速$\overline{x}_1=3.8\ \mathrm{m/s}$，方差$s_1^2=0.68$；1956—1970 年的年平均风速$\overline{x}_2=2.5\ \mathrm{m/s}$，方差$s_2^2=0.16$．如果$\sigma_1=\sigma_2$，问统计累年平均值时，两段风速资料是否可以合并使用？（取$\alpha=0.01$.）

解 依题意需检验假设

$$H_0:\ \mu_1=\mu_2,\ H_1:\ \mu_1\neq\mu_2.$$

若假设H_0为真，则检验统计量

$$t=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}.$$

因 $\alpha=0.01$，且双侧检验，查表得 $t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.01/2}(19)\approx 2.86$，故拒绝域为

$$W=\{t\,|\,|t|\geqslant t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\},$$

已知 $\overline{x}_1=3.8$，$s_1^2=0.68$，$\overline{x}_2=2.5$，$s_2^2=0.16$，则有

$$|t|=\left|\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\right|=\left|\frac{3.8-2.5}{\sqrt{\frac{(6-1)\times 0.68+(15-1)\times 0.16}{6+15-2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\right)}}\right|\approx 4.94>2.86,$$

即 t 在拒绝域内，此时拒绝原假设 H_0，故两段风速资料不能合并使用.

3. 方差未知且不相等（$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$）时均值的检验

设两个正态总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 是来自总体 X 的样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 是来自总体 Y 的样本，且两样本相互独立. 又设两个样本的平均值分别为 $\overline{X},\overline{Y}$，$\sigma_1^2$ 和 σ_2^2 未知且不相等，现需检验假设

$$H_0:\ \mu_1=\mu_2,\quad H_1:\ \mu_1\neq\mu_2.$$

若假设 H_0 为真，则检验统计量

$$t=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\sim t_{\alpha/2}(\nu),$$

其中，$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2$，自由度

$$\nu=\frac{(S_1^2/n_1+S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}},$$

ν 一般不是整数，可取最接近于 ν 的整数 l 为自由度.

对于给定的显著性水平 α，拒绝域为

$$W=\{t\,|\,|t|\geqslant t_{\alpha/2}(\nu)\}.$$

下面将正态总体均值的假设检验总结在表 7-4 中.

表 7-4

方差	原假设 H_0	对立假设 H_1	检验用统计量及其服从的分布	拒绝域
σ_1^2,σ_2^2 已知	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\{u \mid \lvert u\rvert\geqslant u_{\alpha/2}\}$
	$\mu_1\leqslant\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$		$\{u \mid u\geqslant u_{\alpha}\}$
	$\mu_1\geqslant\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$		$\{u \mid u\leqslant -u_{\alpha}\}$
σ_1^2,σ_2^2 未知，但相等	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\{t \mid \lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}$
	$\mu_1\leqslant\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$		$\{t \mid t\geqslant t_{\alpha}(n_1+n_2-2)\}$
	$\mu_1\geqslant\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$		$\{t \mid t\leqslant -t_{\alpha}(n_1+n_2-2)\}$
σ_1^2,σ_2^2 未知，不相等	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}\sim t(\nu)$	$\{t \mid \lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(\nu)\}$
	$\mu_1\leqslant\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$		$\{t \mid t\geqslant t_{\alpha}(\nu)\}$
	$\mu_1\geqslant\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$		$\{t \mid t\leqslant -t_{\alpha}(\nu)\}$

例 9 科学家们普遍相信高纤维含量的谷类食品能够降低各种癌症的发病率．此外，有的科学家认为，相对于早餐不吃高纤维谷类食品的人而言，早餐食用高纤维谷类食品的人在午餐中平均摄入的卡路里要少一些．如果结论属实，那么高纤维谷类食品生产厂家就可以声称，食用高纤维谷类食品有另一个好处——对减肥者具有减肥的功效．在这个结论的初步验证中，调查者随机抽出了 150 人，询问他们通常早餐和午餐都吃些什么，并将受访者分为高纤维谷类食品消费者和非高纤维谷类食品消费者两类，他们午餐所含的卡路里含量分别如下．

高纤维谷类食品的消费者午餐摄入的卡路里：

568，646，607，555，530，714，593，647，650，498，636，
529，565，566，639，551，580，629，589，739，637，568，
687，693，683，532，651，681，539，617，584，694，556，
667，467，540，596，633，607，566，473，649，622；

非高纤维谷类食品的消费者午餐摄入的卡路里：

705，754，740，569，593，637，563，421，514，536，819，
741，688，547，723，553，733，812，580，833，706，628，
539，710，730，620，664，547，624，644，509，537，725，
679，701，679，625，643，566，594，613，748，711，674，
672，599，655，693，709，596，582，663，607，505，685，
566，466，624，518，750，601，526，816，527，800，484，
462，549，554，582，608，541，426，679，663，739，603，
726，623，788，787，462，773，830，369，717，646，645，
747，573，719，480，602，596，642，588，794，583，428，

754，632，765，758，663，476，790，573.

试问在 5%的显著性水平下，该科学家能证明早餐食用高纤维谷类食品的人在午餐中平均摄入的卡路比早餐不吃高纤维谷类食品的人要少一些吗？

解　依题意可知，需检验的是高纤维谷类食品消费者午餐摄入的平均卡路里数 μ_1 是否小于非高纤维谷类食品消费者午餐摄入的平均卡路里数 μ_2 . 因此建立假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2, \ H_1: \mu_1 < \mu_2 .$$

检验统计量为

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \sim t(\nu) .$$

由题可得 $n_1 = 43$, $\overline{x}_1 = 604.02$, $s_1^2 = 4\,103$, $n_2 = 107$, $\overline{x}_2 = 633.23$, $s_2^2 = 10\,670$ ，检验统计量的自由度为

$$\nu = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} = \frac{(4\,103/43 + 10\,670/107)^2}{\dfrac{(4\,103/43)^2}{43 - 1} + \dfrac{(10\,670/107)^2}{107 - 1}} \approx 123 .$$

已知 $\alpha = 0.05$ ，查表得 $-t_\alpha(\nu) = -t_{0.05}(123) = -1.658$ ，故拒绝域为

$$\{t \leqslant -1.658\} ,$$

由于

$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(604.02 - 633.23) - 0}{\sqrt{\dfrac{4\,103}{43} + \dfrac{10\,670}{107}}} \approx -2.09 < -1.658 ,$$

即 t 落在拒绝域内，此时拒绝原假设 H_0 ，故有充分证据可以推断，高纤维谷类食品消费者午餐摄入的卡路里数较少.

4. 大样本两个总体均值的检验

设 X , Y 两个总体的分布是任意的，方差 σ_1^2 , σ_2^2 未知， $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 是来自总体 X 的样本， $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 是来自总体 Y 的样本，且两样本相互独立. 原假设 H_0 ： $\mu_1 = \mu_2$ ，现从两个总体中抽取样本，样本容量、平均数、样本方差分别为 n_1 , $\overline{X}$, S_1^2 和 n_2 , $\overline{Y}$, S_2^2 .

当 n_1 和 n_2 都很大时，统计量

$$U = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \sim N(0,1) ,$$

拒绝域为

$$W=\{u \mid |u| \geqslant u_{\alpha/2}\}.$$

例 10 某细纱车间在两种工艺条件下纺得细纱，从中各抽取 100 个试样，测得细纱强力的数据，经计算得：

甲工艺：$n_1=100, \overline{x}_1=280, s_1=28$；

乙工艺：$n_2=100, \overline{x}_2=286, s_2=28.5$.

试问在 $\alpha=0.05$ 下，两种工艺条件对细纱强力有无显著影响？

解 由题意检验假设

$$H_0: \mu_1=\mu_2, \ H_0: \mu_1 \neq \mu_2.$$

由于 $\alpha=0.05$，查表得 $u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$，故拒绝域为

$$W=\{u \mid |u| \geqslant 1.96\}.$$

已知 $n_1=100, \overline{x}_1=280, s_1=28$， $n_2=100, \overline{x}_2=286, s_2=28.5$，则有

$$|u|=\left|\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}\right|=\left|\frac{280-286}{\sqrt{\frac{28^2}{100}+\frac{28.5^2}{100}}}\right| \approx 1.5<1.96,$$

即 u 不在拒绝域内，此时接受原假设 H_0，故两种工艺条件对细纱强力无显著影响.

7.3 大样本总体比率的假设检验

7.3.1 大样本单个总体比率的检验

在实际问题中，常常需要对一个事件 A 发生的概率 p 进行假设检验. 此时，总体服从两点分布. 设总体 $X \sim B(1, p)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，p 为未知参数，则检验假设有以下三种情形.

（1）H_0：$p=p_0$，H_1：$p \neq p_0$； （7-11）

（2）H_0：$p \leqslant p_0$，H_1：$p>p_0$； （7-12）

（3）H_0：$p \geqslant p_0$，H_1：$p<p_0$. （7-13）

由中心极限定理可知：当 n 充分大 $(n \geqslant 30)$ 时，有

$$\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1),$$

其中 $\overline{X}$ 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的频率.

若原假设 H_0 为真，则统计量

$$U=\frac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\sim N(0,1)\ .$$

对于给定的显著性水平 α，有

（1）对假设（7-11），$P\{|u|\geqslant u_{\alpha/2}\}=\alpha$，可得拒绝域为 $\{u||u|>u_{\alpha/2}\}$；

（2）对假设（7-12），$P\{u\geqslant u_{\alpha}\}=\alpha$，可得拒绝域为 $\{u|u>u_{\alpha}\}$；

（3）对假设（7-13），$P\{u\leqslant -u_{\alpha}\}=\alpha$，可得拒绝域为 $\{u|u<-u_{\alpha}\}$.

例 1　如果能够证明某部电视连续剧在播出后的前 13 周中观众的收视率超过了 25%，则可以认为它获得了成功. 现针对一部农村生活题材的电视剧抽选了 400 个家庭组成一个样本，发现前 13 周有 112 个家庭看过这部电视剧. 在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下，检验该电视剧是否获得了成功?

解　依题意需检验假设

$$H_0:\ p\leqslant p_0=25\%,\ H_1:\ p>25\%\ .$$

选择统计量

$$U=\frac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\sim N\left(0,1\right).$$

因为 $\alpha=0.01$，查表得 $u_{\alpha}=u_{0.01}=2.326$，所以拒绝域为

$$W=\left\{u\,|\,u=\frac{\bar{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}>u_{\alpha}=2.326\right\}\ .$$

已知 $\bar{x}=\dfrac{112}{400}=0.28$，$p_0=0.25$，$n=400$，代入公式得

$$u=\frac{\bar{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}=\frac{0.28-0.25}{\sqrt{0.25(1-0.25)/400}}\approx 1.386<2.326\ ,$$

即 u 没有落在拒绝域内，故接受 H_0，即认为该电视剧没有获得成功.

7.3.2　大样本两个总体比率的检验

对于两个独立的两点分布总体 X 与 Y，要检验的是两个总体参数 p_1，p_2 的差异性. 现需检验:

（1）H_0：$p_1=p_2$，H_1：$p_1\neq p_2$；　　（7-14）

（2）H_0：$p_1 \leqslant p_2$，H_1：$p_1 > p_2$；（7-15）

（3）H_0：$p_1 \geqslant p_2$，H_1：$p_1 < p_2$．（7-16）

由中心极限定理可知，当 H_0 为真且 n_1, n_2 充分大（n_1, n_2 均大于 100）时，有

$$U = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n_1 + 1/n_2)}} \sim N(0,1).$$

其中，$\hat{p}_1 = \overline{X}$，$\hat{p}_2 = \overline{Y}$，$\hat{p} = \dfrac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i + \sum_{i=1}^{n_2} Y_i\right)$，$\hat{p}_1$ 是 n_1 次独立重复试验中事件 A 发生的频率，$\hat{p}_2$ 是 n_2 次独立重复试验中事件 B 发生的频率，而 $\hat{p}$ 为 n_1+n_2 次试验中事件 A, B 发生的频率，称为**联合频率**．对于给定的显著性水平 α，有

（1）对假设（7-14），$P\{|u| \geqslant u_{\alpha/2}\} = \alpha$，可得拒绝域为 $\{u \mid |u| > u_{\alpha/2}\}$；

（2）对假设（7-15），$P\{u > u_\alpha\} = \alpha$，可得拒绝域为 $\{u \mid u > u_\alpha\}$；

（3）对假设（7-16），$P\{u < -u_\alpha\} = \alpha$，可得拒绝域为 $\{u \mid u < -u_\alpha\}$．

例 2　吉祥兄弟公司是一家生产和销售各种日用品的公司．由于面临残酷的竞争，该公司的一件产品——浴皂的销售情况令人堪忧．为了改善该产品的销售情况，公司决定引入更加诱人的包装．公司的广告代理给出了两种新的设计方案：第一种方案是将包装改成几种艳丽夺目的颜色的组合，由此和其他公司的产品区别开来；第二种方案是在淡绿色的背景上，只有公司的标记．为了检验哪种方案更加出色，营销经理选择了两家超市进行比较试验，其中一家超市里浴皂的包装使用第一种方案，而另一家超市的包装则采用第二种方案．营销试验历时一个星期．在这个星期里，产品扫描仪将记录下所有浴皂的销售情况，统计结果列于表 7-5．

表 7-5

	超市 1	超市 2
购买了吉祥兄弟公司的浴皂	180	155
购买了其他公司的浴皂	724	883

由于色彩鲜艳的包装带来了附加成本，所以它必须比简单包装多出 3%的销售量才能获得利润．在这种条件下，该经理是否应该采用第一种方案？（取 $\alpha = 0.05$．）

解　依题意，要检验的参数是两个总体比例 $p_1 - p_2$ 间的差异，其中 p_1, p_2 分别是在超市 1 和超市 2 中吉祥兄弟公司浴皂的销售比例．由于色彩鲜艳的包装必须比简单包装多出 3%的销售量才能获得利润，因此检验假设

$$H_0：p_1 - p_2 = 0.03，H_1：p_1 - p_2 > 0.03.$$

根据题目所给数据计算得

$n_1 = 180 + 724 = 904$，$n_2 = 155 + 883 = 1038$，$\hat{p}_1 = \dfrac{180}{904} \approx 0.1991$，$\hat{p}_2 = \dfrac{155}{1038} \approx 0.1493$，

联合频率为

$$\hat{p} = \frac{180+155}{904+1038} = \frac{335}{1942} \approx 0.1725 .$$

已知 $\alpha = 0.05$，查表得 $u_\alpha = u_{0.05} = 1.645$，则检验统计量的观测值

$$u = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.1991 - 0.1493 - 0.03}{\sqrt{0.1725 \times (1 - 0.1725) \times \left(\dfrac{1}{904} + \dfrac{1}{1038}\right)}} \approx 1.15 < 1.645,$$

即 u 未落在拒绝域内，此时接受原假设 H_0，所以没有足够的证据表明，购买色彩鲜艳包装浴皂的消费者的比例比购买简单包装的消费者的比例高出 3%．在这种没有足够证据的情况下，分析者建议经理采用简单绿色包装的设计方案．

7.4　正态总体方差的假设检验

7.4.1　单个正态总体方差的检验

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ, σ^2 均未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，现检验假设

$$H_0:\ \sigma^2 = \sigma_0^2,\quad H_1:\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

其中 σ_0^2 为已知常数．

由于 S^2 是 σ^2 的无偏估计，当 H_0 为真时，比值 $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$ 一般应在 1 附近摆动，而不应该过分大于 1 或过分小于 1．此时，可取检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2},$$

该统计量服从自由度 $v = n-1$ 的 χ^2 分布，即

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1).$$

对于给定的显著性水平 α，有

$$P\{[\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)] \cup [\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha/2}(n-1)]\} = \alpha,$$

则 H_0 的拒绝域为

$$W = \{\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}.$$

上述检验法称为 χ^2 **检验法**．关于 σ^2 的另外两个检验问题的拒绝域如表 7-6 所示．

表 7-6

条件	原假设 H_0	检验统计量	对立假设 H_1	拒绝域
μ 未知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$
	$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$		$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha}(n-1)$
	$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$		$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
μ 已知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}(n)$ 或 $\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha/2}(n)$
	$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$		$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha}(n)$
	$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$		$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}(n)$

注意

以上讨论的是在 μ 未知的情况下对方差的假设检验，这种情况在实际问题中较多．对于 μ 已知的情况，方差的假设检验方法与 μ 未知的情况类似，只是所选的统计量变为

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

因此，我们仅把 μ 已知时单个正态总体方差检验的拒绝域列于表 7-6 中．

例 1 某厂生产一种电子产品，此产品的某个指标服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$．现从中抽取容量为 $n=8$ 的一个样本，测得样本均值 $\bar{x}=61.125$，样本方差 $s^2=93.268$．在 μ 未知的情况下，试检验假设 $\sigma^2=8^2$．（取 $\alpha=0.05$．）

解 依题意需检验假设

$$H_0: \sigma^2=\sigma_0^2=8^2, \quad H_1: \sigma^2 \neq 8^2.$$

由于 μ 未知，故检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1).$$

已知 $n=8$，$s^2=93.268$，代入公式得

$$\chi^2 = \frac{(8-1)\times 93.268}{8^2} \approx 10.2012 .$$

又显著性水平 $\alpha = 0.05$，查表得

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(7) = 1.690,\quad \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(7) = 16.013,$$

则 $1.690 < 10.2012 < 16.013$，即 χ^2 不在拒绝域内，故接受 H_0：$\sigma^2 = 8^2$.

7.4.2 两个正态总体方差的检验

设两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，$X$ 和 Y 相互独立. 从这两个总体中分别抽出样本 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$，且 μ_1 和 μ_2 未知. 现检验假设

$$H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2,\quad H_1:\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 .$$

在原假设 H_0 成立的条件下，检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(m-1, n-1) .$$

对于给定的显著性水平 α，有

$$P\{(F \leqslant F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)) \cup (F \geqslant F_{\alpha/2}(m-1, n-1))\} = \alpha ,$$

则 H_0 的拒绝域为

$$W = \{F \leqslant F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) \text{ 或 } F \geqslant F_{\alpha/2}(m-1, n-1)\} .$$

上述检验法称为 F **检验法**，关于 σ_1^2, σ_2^2 的另外两个检验问题的拒绝域如表 7-7 所示.

表 7-7

检验问题	检验统计量	拒绝域
H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，H_1：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F \leqslant F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)$ 或 $F \geqslant F_{\alpha/2}(m-1, n-1)$
H_0：$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$，$H_1$：$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$F \geqslant F_{\alpha}(m-1, n-1)$
H_0：$\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$，$H_1$：$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$		$F \leqslant F_{\alpha}(m-1, n-1)$

例 2 为比较不同季节出生女婴体重的方差，从某年 12 月和 6 月出生的女婴中分别随机抽取 6 名、10 名，测其体重（单位：g）如下：

12 月：3 220，2 960，3 120，2 960，3 260，3 060；

6 月：3 220，3 220，3 760，3 000，2 420，3 740，3 060，3 080，2 940，3 060.

假定新生女婴的体重服从正态分布，问冬季出生女婴体重的方差是否比夏季的小？（取 $\alpha = 0.05$.）

解 设 X, Y 分别表示冬、夏两季新生女婴的体重，X, Y 相互独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，现需检验假设

$$H_0:\ \sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2,\ H_1:\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

由于μ_1, μ_2未知，故检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(m-1, n-1).$$

经计算，$s_1^2 = 505\,667, s_2^2 = 93\,956$，代入公式得

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{505\,667}{93\,956} \approx 5.38.$$

已知$m-1=5, n-1=9, \alpha=0.05$，查表得

$$F_\alpha(m-1, n-1) = F_{0.05}(5, 9) = 3.48,$$

则$5.38 > 3.48$，即F落在拒绝域内，故不能认为冬季出生女婴体重的方差比夏季的小.

例 3 在针织品漂白工艺中，要考虑温度对针织品断裂强力的影响. 为比较 70℃和80℃的影响有无显著性差异，在这两个温度下，分别重复做了 8 次试验，得到断裂强力的数据如下（单位：N）:

70℃：20.5，18.8，19.8，20.9，21.5，21.0，21.2，19.5;

80℃：17.7，20.3，20.0，18.8，19.0，20.1，20.2，19.1.

由长期生产数据可知，针织品断裂强力服从正态分布，且方差不变，试检验 70℃和80℃时针织品断裂强力的方差是否相等？（显著性水平为$\alpha = 0.05$.）

解 依题意需检验假设

$$H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2,\ H_1:\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

由于μ_1, μ_2未知，故检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(m-1, n-1).$$

经计算得$s_1^2 = 0.885\,7, s_2^2 = 0.828\,6$，故检验统计量的观测值为

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.885\,7}{0.828\,6} \approx 1.07.$$

又$m-1=7, n-1=7, \alpha=0.05$，查表得

$$F_{\alpha/2}(n-1, m-1) = F_{0.025}(7, 7) = 4.99,$$

$$\frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1, n-1)} = \frac{1}{F_{0.025}(7, 7)} = \frac{1}{4.99} \approx 0.20,$$

显然有

$$\frac{1}{F_{0.025}(7,7)} \approx 0.20 < F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \approx 1.07 < F_{0.025}(7,7) = 4.99,$$

即 F 不在拒绝域内，故认为 70℃和 80℃时针织品断裂强力的方差是相等的.

7.5 假设检验问题的 p 值检验

显著性水平 α 是在检验之前确定的，这也就意味着我们事先确定了拒绝域. 这种给定的显著性水平 α 对检验结果的可靠性起了一种度量作用. 但不足的是，α 是犯第一类错误的上限控制值，它只能提供检验结论可靠性的一个大致范围，而对于一个特定的假设检验问题，却无法给出观测值与原假设之间不一致程度的精确度量，也就是说，仅从显著性水平来比较，如果选择的 α 值相同，所有检验结论的可靠性都一样. 若要判断样本观测数据与原假设中假设值的偏离程度，则需要计算 p 值.

p 值是指在一个假设检验问题中，利用观测值作出拒绝原假设的最小显著性水平. 如果 p 值小于显著性水平 α，则相应的检验统计量的值落在拒绝域中. 因此，在假设检验中，可以利用 p 值来进行决策，具体检验规则如下：

（1）若 $\alpha \geqslant p$ 值，则拒绝原假设 H_0；

（2）若 $\alpha < p$ 值，则接受原假设 H_0.

设检验统计量 t 为连续型变量，t_α 表示 t 分布的上侧分位数，检验的显著性水平为 α，其拒绝域所对应的 p 值计算式如下.

情形 1 若检验的拒绝域为：$t < t_{1-\alpha}$，检验统计量的值为 t_0，且 $t_0 < t_{1-\alpha}$，则该检验的 p 值计算式为 $p = P\{t < t_0\}$；

情形 2 若检验的拒绝域为：$t > t_\alpha$，检验统计量的值为 t_0，且 $t_0 > t_\alpha$（即 t_0 落入拒绝域），则该检验的 p 值计算式为 $p = P\{t > t_0\}$；

情形 3 若检验的拒绝域为：$|t| > t_{\alpha/2}$，检验统计量的值为 t_0，且 $|t_0| > t_{\alpha/2}$（即 t_0 落入拒绝域），则该检验的 p 值计算式为 $p = P\{|t| > |t_0|\}$.

例 设总体 $X \sim N(\mu, 9)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为来自该总体 X 的一个样本，其样本均值为 $\overline{x} = 12$. 检验假设为

$$H_0: \mu = \mu_0 = 10, \quad H_1: \mu \neq 10,$$

检验的显著性水平 $\alpha = 0.05$，试计算检验的 p 值.

解 依题意，检验的拒绝域为

$$W=\left\{u \| u|=\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{\alpha/2}\right\}.$$

已知 $\overline{x}=12$，$n=10$，$\mu_0=10$，$\sigma^2=9$，$\alpha=0.05$，查表得 $u_{0.025}=1.96$，则

$$u=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{12-10}{3/\sqrt{10}}\right|\approx 2.11>1.96,$$

故拒绝原假设 H_0.

检验的 p 值为

$$p=P\{|u|>2.11\}=2[1-\Phi(2.11)]\approx 2(1-0.982\,6)=0.034\,8,$$

由 p 值的意义可知，当显著性水平 α 降低到 0.034 8 时仍会作出拒绝的选择.

7.6 分布假设的检验

7.6.1 χ^2 检验

前面我们讨论的假设检验问题总是在假定总体分布形式已知的前提下，对未知参数提出相应的假设检验问题，而这个假定是根据以前的经验作出的. 如果没有过去的经验，或者对过去的经验有所怀疑，此时就需要验证这个假定，这就是分布假设检验问题.

为了利用统计资料作出推断，我们常常需要选择某种已知的概率分布来近似所研究的频率分布，但需分析其存在的误差程度. 而 χ^2 检验就能够检验某种频率分布是否服从于某种理论分布，以便我们掌握这种分布的特性. 同时，这种检验反过来也确定了用某种理论分布来研究某一实际问题时的适应性. χ^2 检验用于这方面的检验称作**拟合优度检验**.

例如，将一颗骰子掷 120 次，得到的数据如表 7-8 所示，问这颗骰子是否均匀对称？（取 $\alpha=0.05$.）

表 7-8

投得点数	1	2	3	4	5	6
观测次数	23	26	21	20	15	15

为检验骰子是否均匀，要重复地进行抛掷骰子的试验，并统计各点出现的频率与1/6的差距，问题归结为如何利用得到的统计数据对“骰子是否均匀”的假设进行检验.

对各类比例 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 分别派定 $p_1^0,p_2^0,\cdots,p_k^0$，从总体中随机抽出 n 个个体，发现其中含有 n_i 个 A_i 类个体 $(i=1,2,\cdots,k)$. 根据观察结果检验原假设

$$H_0: \ p_1 = p_1^0, p_2 = p_2^0, \cdots, p_k = p_k^0,$$

$E_i = np_i^0$ 称为 A_i **类的理论频数**（或理论值），n_i 称为 A_i **类的观察频数**（或实际值）.

1900 年英国统计学家卡尔·皮尔逊证明了如下结论：

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2(k-1), \tag{7-17}$$

因而拒绝域为

$$\{\chi^2 \geqslant \chi_\alpha{}^2(k-1)\},$$

且在实际应用中要求 n 必须充分大，以至于每类中的观察频数都不应小于 5，最好在 10 以上．若某个 n_i 不满足 $n_i \geqslant 5$，应适当合并相邻的小区间，使其满足要求.

上例中，若这颗骰子是均匀对称的，则 1～6 点中每点出现的可能性相同，都为1/6，如果用 A_i 表示第 i 点出现 $(i=1,2,\cdots,6)$，则待检验假设

$$H_0: \ P(A_i) = 1/6 \ (i=1,2,\cdots,6).$$

在 H_0 成立的条件下，理论频率 $p_i^0 = P(A_i) = 1/6$，由 $n=120$ 得频率 $np_i^0 = 20$．由于分布不含未知参数，又 $k=6, \alpha=0.05$，查表得

$$\chi_\alpha^2(k-1) = \chi_{0.05}^2(5) = 11.071,$$

则

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(n_i - np_i^0)^2}{np_i^0} = 4.8 < 11.071,$$

故接受 H_0，认为这颗骰子是均匀对称的.

χ^2 还可用以下公式计算.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i^0)^2}{np_i^0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{p_i^0} - n.$$

例 1　按孟德尔的遗传定律，让开粉红花的豌豆随机交配，子代可分为红花、粉红花和白花三类，其比例为 1∶2∶1．为检验这个理论，特别安排了一个实验：100 株豌豆中开红花的有 30 株，开粉红花的有 48 株，开白花的有 22 株．试问这些数据与孟德尔遗传定律是否一致？（取 $\alpha = 0.05$.）

解　从豌豆中任选一株，开红花、粉红花及白花分别设为事件 A_1, A_2, A_3，则按孟德尔定律有

$$p_1 = P(A_1) = \frac{1}{4}, \quad p_2 = P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad p_3 = P(A_3) = \frac{1}{4}.$$

现假设检验

H_0：孟德尔定律成立，H_1：孟德尔定律不成立．

选择统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-E_i)^2}{E_i}\sim\chi^2(k-1),$$

由于 $\alpha=0.05$，查表得 $\chi^2_{0.05}(2)=5.991$，故拒绝域为

$$\{\chi^2\geqslant 5.991\}.$$

已知 $n_1=30,n_2=48,n_3=22,n=100,E_1=np_1=25,E_2=np_2=50,E_3=np_3=25$，则有

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{3}\frac{(n_i-E_i)^2}{E_i}=\frac{(n_1-E_1)^2}{E_1}+\frac{(n_2-E_2)^2}{E_2}+\frac{(n_2-E_2)^2}{E_2}$$

$$=\frac{(30-25)^2}{25}+\frac{(48-50)^2}{50}+\frac{(22-25)^2}{25}=1+0.08+0.36=1.44<5.991,$$

即 χ^2 不在拒绝域内，此时接受原假设 H_0，故孟德尔定律是成立的．

例 2 连续上抛一枚硬币，直到出现正面为止，即为完成一局．X 是指在一局中第一次出现正面的上抛次数．设完成 586 局，对应不同的上抛次数 k，其频数分布数据如表 7-9 所示．

表 7-9

上抛次数 k	1	2	3	4	5	6	$\geqslant 7$
频数 n_k	280	147	86	38	15	13	7

问此硬币是否均匀？（取 $\alpha=0.05$．）

解 由题意检验假设

H_0：硬币是均匀的，即每次出现正面或反面的概率同为 $\frac{1}{2}$，H_1：硬币是不均匀的，

则有

$$p_k=P\{X=k\}=\left(\frac{1}{2}\right)^k\ (k=1,2,3,4,5,6),$$

$$P\{X\geqslant 7\}=1-P\{X\leqslant 6\}=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)=\frac{1}{2^6}=p_6.$$

选择统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-E_i)^2}{E_i}\sim\chi^2(k-1),$$

由于 $\alpha=0.05$，查表得 $\chi^2_\alpha(k-1)=\chi^2_{0.05}(6)=12.592$，故拒绝域为

$$\{\chi^2 \geqslant 12.592\}.$$

将所给数据代入公式得

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-E_i)^2}{E_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i^2}{p_i^0}-n$$
$$=\frac{1}{586}\times\left(\frac{280^2}{1/2}+\frac{147^2}{1/4}+\frac{86^2}{1/8}+\frac{38^2}{1/16}+\frac{15^2}{1/32}+\frac{13^2}{1/64}+\frac{7^2}{1/64}\right)-586\approx 5.57<12.592,$$

即 χ^2 不在拒绝域内，此时接受原假设 H_0，故此枚硬币是均匀的.

上面讨论的 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是已知的情况，但是在实际问题中，$p_1,p_2,\cdots,p_k$ 通常依赖于 l 个未知参数，而这 l 个未知参数需要用样本进行估计. 我们可以先用极大似然估计法估计这 l 个未知参数，此时统计量为

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}.$$

当 $n\to\infty$ 时，其近似分布为 $\chi^2(k-l-1)$，拒绝域为

$$\{\chi^2\geqslant \chi_\alpha{}^2(k-l-1)\}.$$

此时，χ^2 还可用以下公式计算.

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i^2}{\hat{p}_i}-n.$$

例 3　从一批棉纱中随机抽取 300 条进行拉力试验，结果如表 7-10 所示. 试检验棉纱的拉力强度（单位：kgf）X 是否服从正态分布.（取 $\alpha=0.01$.）

表 7-10

i	x	n_i	i	x	n_i
1	0.5～0.64	1	8	1.48～1.62	53
2	0.64～0.78	2	9	1.62～1.76	25
3	0.78～0.92	9	10	1.76～1.90	19
4	0.92～1.06	25	11	1.90～2.04	16
5	1.06～1.20	37	12	2.04～2.18	3
6	1.20～1.34	53	13	2.18～2.38	1
7	1.34～1.48	56			

解　依题意需检验假设

H_0：拉力强度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，H_1：拉力强度 X 不服从正态分布.

（1）将观测值 x_i 分成 13 组，这相当于 $a_0=-\infty, a_1=0.64, a_2=0.78,\cdots, a_{12}=2.18$，

$a_{13}=+\infty$. 但是这样分组后，前两组和最后两组的 np_i 比较小，于是，把它们合并成为一个组（如表 7-11 所示）.

表 7-11

区间序号	区间	n_i	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$n_i-n\hat{p}_i$
1	⩽0.78 或 >2.04	7	0.015 6	4.68	2.32
2	0.78～0.92	9	0.022 3	6.69	2.31
3	0.92～1.06	25	0.058 4	17.52	7.48
4	1.06～1.20	37	0.120 5	36.15	0.85
5	1.20～1.34	53	0.184 6	55.38	-2.38
6	1.34～1.48	56	0.212 8	63.84	-7.84
7	1.48～1.62	53	0.184 6	55.38	-2.38
8	1.62～1.76	25	0.120 5	36.15	-11.15
9	1.76～1.90	19	0.058 4	17.52	1.48
10	1.90～2.04	16	0.022 3	6.69	9.31

（2）计算每个区间上的理论频数. 这里，$F(x)$ 就是正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的分布函数，含有两个未知参数 μ 和 σ^2，分别用它们的极大似然估计

$$\hat{\mu}=\overline{X},\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

来代替. 关于 $\overline{X}$ 的计算作如下说明：因为表中每个区间都很狭窄，可以认为每个区间内 X_i 都取这个区间的中点，即组中值，将组中值乘以该区间的样本数，然后相加再除以总样本数就得到样本均值 $\overline{X}$，计算结果：$\hat{\mu}=1.41,\hat{\sigma}^2=0.26^2$.

对于服从 $N(1.41,0.26^2)$ 的随机变量 Y，计算它在上面第 i 个区间上的概率 p_i. 例如，

$$\hat{p}_1=P\{Y\leqslant 0.78\}+P\{Y>2.04\}=P\left\{\frac{Y-1.41}{0.26}\leqslant -2.42\right\}+P\left\{\frac{Y-1.41}{0.26}>2.42\right\}$$
$$=\varPhi(-2.42)+[1-\varPhi(2.42)]=2[1-\varPhi(2.42)]=2\times(1-0.992\,2)=0.015\,6,$$
$$\hat{p}_2=P\{0.78<Y\leqslant 0.92\}=P\left\{-2.42<\frac{Y-1.41}{0.26}\leqslant -1.88\right\}=\varPhi(-1.88)-\varPhi(-2.42)$$
$$=[1-\varPhi(1.88)]-[1-\varPhi(2.42)]=\varPhi(2.42)-\varPhi(1.88)=0.992\,2-0.969\,9=0.022\,3,$$

依次计算 $\hat{p}_2,\hat{p}_2,\cdots,\hat{p}_{10}$，计算结果列于表 7-11 中.

（3）计算观测值落在每个区间上的实际频数 n_i，列于表 7-11 中.

（4）计算统计量的值：

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{10}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}=22.07.$$

因为 $k=10$，$l=2$，所以 χ^2 的自由度为 $10-2-1=7$，$\chi^2_{0.01}(7)\approx 18.48<\chi^2=22.07$，故拒绝原假设，即认为棉纱拉力强度不服从正态分布．

例 4　某种配偶的后代按体格属性分为三类，其数目分别是 10，53，46．按照某种遗传模型，三类频率之比应为 $p^2:2p(1-p):(1-p)^2$，问数据与模型是否相等？（取 $\alpha=0.05$．）

解　设 $p_1=p^2$，$p_2=2p(1-p)$，$p_3=(1-p)^2$，由题意可知假设

$$H_0：频率之比为 p_1:p_2:p_3（此处有一未知参数 p）.$$

现在观察到三类的数目分别为 n_1，n_2，n_3 $(n=n_1+n_2+n_3=109)$，采用极大似然估计法来求 $\hat{p}$，则

$$\hat{p}=\frac{2n_1+n_2}{2n}.$$

计算得 $\hat{p}=\dfrac{20+53}{218}\approx 0.335$，由此

$$\hat{p}_1=\hat{p}^2\approx 0.112,\ \hat{p}_2=2\hat{p}(1-\hat{p})\approx 0.45,\ \hat{p}_3=(1-\hat{p})^2\approx 0.44.$$

在 H_0 成立的条件下，取统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{3}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}\sim\chi^2(3-1-1).$$

已知 $\alpha=0.05$，查表得 $\chi^2_{0.05}(1)=3.841$，故拒绝域为

$$\{\chi^2\geqslant 3.841\}.$$

将相关数据代入公式得

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{3}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}=\frac{(10-109\times 0.112)^2}{109\times 0.112}+\frac{(53-109\times 0.45)^2}{109\times 0.45}+\frac{(46-109\times 0.44)^2}{109\times 0.44}\approx 0.80<3.841,$$

所以 χ^2 不在拒绝域内，此时接受 H_0，即认为数据与模型相符．

例 5　地震的准确预报是一个世界难题．要解决这一世界难题，应更多、更全面地了解地震规律．有人统计了从 1965 年 1 月 1 日至 1971 年 2 月 9 日共 2 231 天中，全世界记录到里氏四级和四级以上的地震共计 162 次，地震发生的间隔时间及频数如表 7-12 所示．

表 7-12

相继两次地震间隔天数	0～4	5～9	10～14	15～19	20～24	25～29	30～34	35～39	⩾40
频数	50	31	26	17	10	8	6	6	8

根据以往经验，两次突发事件之间的时间间隔一般服从单参数指数分布．取显著性水平 $\alpha=0.05$，检验相继两次地震间隔的天数 X 是否服从指数分布？

解 依题意需检验假设

$$H_0: X \sim \exp\left(\frac{1}{\theta}\right), \ H_1: X\text{不服从指数分布}.$$

由于 X 为两次地震间隔的平均天数，而 $E(X)=\theta$，参数 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}=\overline{X}$. 在 162 次观测中，所用总时间为 2 231 天，故

$$\hat{\theta}=\overline{x}=\frac{2\,231}{162}\approx 13.77 .$$

将 X 可能的取值区间 $[0,+\infty)$ 按记录时间分为 $k=9$ 个互不重叠的区间 $[a_i, a_{i+1})$ $(i=1,2,\cdots,9)$，其中 a_{i+1} 为各组的时间间隔的中间值，即 $a_2=4.5, a_3=9.5,\cdots,a_9=39.5$，$a_{10}=+\infty$. 若 H_0 为真，则 X 的分布函数为

$$\hat{F}(x)=\begin{cases}1-\exp\left(-\dfrac{x}{13.77}\right), & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

因此

$$\hat{p}_i=\hat{P}\{a_i\leqslant X<a_{i+1}\}=\hat{F}(a_{i+1})-\hat{F}(a_i)\ (i=1,2,\cdots,9),$$

计算结果如表 7-13 所示.

表 7-13

区间序号	区间	n_i	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$n_i-n\hat{p}_i$	$\dfrac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$
1	[0, 4.5)	50	0.278 8	45.166	4.834	0.517
2	[4.5, 9.5)	31	0.219 6	35.575	−4.575	0.588
3	[9.5, 14.5)	26	0.152 7	24.737	1.263	0.064
4	[14.5, 19.5)	17	0.106 2	17.204	−0.204	0.002
5	[19.5, 24.5)	10	0.073 9	11.972	−1.972	0.325
6	[24.5, 29.5)	8	0.051 4	8.327	−0.327	0.013
7	[29.5, 34.5)	6	0.035 8	5.800	0.200	0.007
8	[34.5, 39.5)	6	0.024 8	4.018	1.982	0.978
9	[39.5, +∞)	8	0.056 8	9.202	−1.202	0.157

经计算得

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{9}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}=2.651,$$

在给定的显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，查表得 $\chi^2_{0.05}(7)=14.067>2.651$，故接受 H_0，即根据所记录的数据，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，可以认为两次地震间的间隔时间服从参数为 13.77

的指数分布.

7.6.2　列联表和独立性检验

在实际问题中，经常要考察现象之间是否有联系，描述现象的变量是否相互独立. 而 χ^2 分布可以检验两个变量之间的独立性问题，此时首先要将研究对象的观察数据分别按两个变量进行分类. 列联表就是将观察数据按两种因素进行分类表示的表.

一般地，设有 A,B 两因素，各有 r 和 s 个水平，交叉分为 rs 类. 随机抽取 n 个个体，发现其中分到 (i,j) 类（即该个体因素 A 取水平 i，因素 B 取水平 j）的有 n_{ij} 个，这样列成的表称为 $r\times s$ **列联表**，如表 7-14 所示.

表 7-14

$A \backslash B$	1	2	…	j	…	s	和
1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1j}	…	n_{1s}	$n_{1\cdot}$
2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2j}	…	n_{2s}	$n_{2\cdot}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	n_{i1}	n_{i2}	…	n_{ij}	…	n_{is}	$n_{i\cdot}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	n_{r1}	n_{r2}	…	n_{rj}	…	n_{rs}	$n_{r\cdot}$
和	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	…	$n_{\cdot j}$	…	$n_{\cdot s}$	n

其中，$n_{i\cdot}=\sum\limits_{j=1}^{s}n_{ij}$ 是在 n 个个体中其因素 A 取水平 i 的个数，$n_{\cdot j}=\sum\limits_{i=1}^{r}n_{ij}$ 是在 n 个个体中其因素 B 取水平 j 的个数. 当 $i=j=2$ 时，一共有 4 类，这种列联表常称为**“四格表”**.

H_0：A,B 两因素独立的检验问题，即 H_0：$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}\ (i=1,2,\cdots,r;\ j=1,2,\cdots,s)$，观察频数为 n_{ij}，理论频数 $E_{ij}=n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n$，则

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij}-n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n)^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n}\sim\chi^2[(r-1)(s-1)]\,. \qquad (7\text{-}18)$$

例 6　某啤酒厂生产和经销三种类型的啤酒：淡啤酒、普通啤酒和黑啤酒. 公司市场研究小组通过对三种啤酒的市场分析，提出这样的问题：在啤酒饮用者中，男性和女性对这三种啤酒的偏好是否存在差异？如果对啤酒的偏好与啤酒饮用者的性别相互独立，就会

针对所有的啤酒进行广告宣传. 可是，如果啤酒的偏好与啤酒饮用者的性别相关，公司就会针对不同的目标市场进行促销活动. 假定抽取了 150 名啤酒饮用者作为一个简单随机样本，在品尝了每种酒后，要求每个人说出他们的偏好或第一选择，结果如表 7-15 所示. 试问啤酒的偏好与啤酒饮用者的性别是否相互独立？（取 $\alpha=0.05$.）

表 7-15

性别	啤酒偏好			总计
	淡啤酒	普通啤酒	黑啤酒	
男	20	40	20	80
女	30	30	10	70
总计	50	70	30	150

解 依题意可知，H_0：啤酒的偏好与啤酒饮用者的性别独立，则由式（7-18）得

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{(n_{ij}-n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n)^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n}=\frac{(20-80\times 50/150)^2}{80\times 50/150}+\frac{(40-80\times 70/150)^2}{80\times 70/150}+\frac{(20-80\times 30/150)^2}{80\times 30/150}+$$

$$\frac{(30-70\times 50/150)^2}{70\times 50/150}+\frac{(30-70\times 70/150)^2}{70\times 70/150}+\frac{(10-70\times 30/150)^2}{70\times 30/150}\approx 6.12 .$$

而 $\chi^2_{0.05}(2)\approx 5.99$，由于 $6.12>5.99$，即 χ^2 落在拒绝域内，此时拒绝原假设 H_0，故可以认为啤酒的偏好与啤酒饮用者的性别不相互独立.

习题 7

1. 早稻收割根据长势估计平均亩产为 310 kg，收割时，随机抽取了 10 块，测出每块的实际亩产量为 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$，计算得 $\overline{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=320$. 如果已知早稻亩产量 $\overline{X}$ 服从正态分布 $N(\mu,144)$，试问所估产量是否正确？（取 $\alpha=0.05$.）

2. 自动车床加工零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，车床正常时，加工零件长度均值为 10.5. 经过一段时间生产后，要检验该车床是否工作正常，为此抽取该车床加工的 31 个零件，测得数据如表 7-16 所示. 若加工零件长度方差不变，问此车床工作是否正常？（取 $\alpha=0.05$.）

表 7-16

零件长度（mm）	10.1	10.3	10.6	11.2	11.5	11.8	12.0
频数	1	3	7	10	6	3	1

3．某卷烟厂生产甲、乙两种香烟，分别对它们的尼古丁含量（mg）做了六次测定，得如下子样观察值：

甲：25，28，23，26，29，22；

乙：28，23，30，25，21，27.

试问这两种香烟的尼古丁含量有无显著差异？（取 $\alpha=0.05$，两种香烟的尼古丁含量服从正态分布，且方差相等.）

4．某种导线的电阻服从正态分布 $N(\mu, 0.005^2)$，今从新生产的一批导线中随机抽取 9 根，测其电阻，然后计算出样本标准差 $s=0.004\,\Omega$，能否认为这批导线电阻的标准差仍为 0.005?（取 $\alpha=0.05$.）

5．已知某炼铁厂铁水含碳量服从正态分布 $N(4.55, 0.108^2)$．现在测定了 9 炉铁水，其平均含碳量为 4.484．如果认为方差没有变化，可否认为现在生产的铁水的平均含碳量仍为 4.55?（取 $\alpha=0.05$.）

6．某厂生产乐器用合金弦线，其抗拉强度服从均值为 10 560 MPa 的正态分布，现从一批产品中抽取 10 根，测得其抗拉强度（单位：MPa）10 512，10 623，10 668，10 554，10 776，10 707，10 557，10 581，10 666，10 670，问这批产品的抗拉强度有无显著变化？（取 $\alpha=0.01$.）

7．从两台新机床加工的同一种零件中，分别抽若干个样品测量零件尺寸，如表 7-17 所示．试检验这两台机床加工零件的精度是否有显著差异？（取 $\alpha=0.05$，零件尺寸服从正态分布.）

表 7-17

甲机床	6.2	5.7	6.5	6.0	6.3	5.8	5.7	6.0	6.0	5.8	6.0
乙机床	5.6	5.9	5.6	5.7	5.8	6.0	5.5	5.7	5.5		

8．测得两批电子元件样品的电阻（单位：Ω）如表 7-18 所示．设这两批元件的电阻值总体分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且两样本独立．试问这两批电子元件电阻值的方差是否一致？（取 $\alpha=0.05$.）

表 7-18

I 批	0.140	0.138	0.143	0.142	0.144	0.137
II 批	0.135	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

附 录

附表 1　泊松分布表

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

对应λ查表

k \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	0.904 837	0.818 731	0.740 818	0.670 320	0.606 531	0.548 812	0.496 585	0.449 329
1	0.090 484	0.163 746	0.222 245	0.268 128	0.303 265	0.329 287	0.347 610	0.359 463
2	0.004 524	0.016 375	0.033 337	0.053 626	0.075 816	0.098 786	0.121 663	0.143 785
3	0.000 151	0.001 092	0.003 334	0.007 150	0.012 636	0.019 757	0.028 388	0.038 343
4	0.000 004	0.000 055	0.000 250	0.000 715	0.001 580	0.002 964	0.004 968	0.007 669
5		0.000 002	0.000 015	0.000 057	0.000 158	0.000 356	0.000 696	0.001 227
6			0.000 001	0.000 004	0.000 013	0.000 036	0.000 081	0.000 164
7					0.000 001	0.000 003	0.000 008	0.000 019
8							0.000 001	0.000 002
9								

k \ λ	0.9	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
0	0.406 570	0.367 879	0.223 130	0.135 335	0.082 085	0.049 787	0.030 197	0.018 316
1	0.365 913	0.367 879	0.334 695	0.270 671	0.205 212	0.149 361	0.105 691	0.073 263
2	0.164 661	0.183 940	0.251 021	0.270 671	0.256 516	0.224 042	0.184 959	0.146 525
3	0.049 398	0.061 313	0.125 511	0.180 447	0.213 763	0.224 042	0.215 785	0.195 367
4	0.011 115	0.015 328	0.047 067	0.090 224	0.133 602	0.168 031	0.188 812	0.195 367
5	0.002 001	0.003 066	0.014 120	0.036 089	0.066 801	0.100 819	0.132 169	0.156 293
6	0.000 300	0.000 511	0.003 530	0.012 030	0.027 834	0.050 409	0.077 098	0.104 196
7	0.000 039	0.000 073	0.000 756	0.003 437	0.009 941	0.021 604	0.038 549	0.059 540
8	0.000 004	0.000 009	0.000 142	0.000 859	0.003 106	0.008 102	0.016 865	0.029 770
9		0.000 001	0.000 024	0.000 191	0.000 863	0.002 701	0.006 559	0.013 231
10			0.000 004	0.000 038	0.000 216	0.000 810	0.002 296	0.005 292
11				0.000 007	0.000 049	0.000 221	0.000 730	0.001 925
12				0.000 001	0.000 010	0.000 055	0.000 213	0.000 642
13					0.000 002	0.000 013	0.000 057	0.000 197
14						0.000 003	0.000 014	0.000 056
15						0.000 001	0.000 003	0.000 015
16							0.000 001	0.000 004
17								0.000 001

附表 1（续）

k \ λ	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
0	0.011 109	0.006 738	0.004 087	0.002 479	0.001 503	0.000 912	0.000 553	0.000 335
1	0.049 990	0.033 690	0.022 477	0.014 873	0.009 772	0.006 383	0.004 148	0.002 684
2	0.112 479	0.084 224	0.061 812	0.044 618	0.031 760	0.022 341	0.015 555	0.010 735
3	0.168 718	0.140 374	0.113 323	0.089 235	0.068 814	0.052 129	0.038 889	0.028 626
4	0.189 808	0.175 467	0.155 819	0.133 853	0.111 822	0.091 226	0.072 916	0.057 252
5	0.170 827	0.175 467	0.171 401	0.160 623	0.145 369	0.127 717	0.109 375	0.091 604
6	0.128 120	0.146 223	0.157 117	0.160 623	0.157 483	0.149 003	0.136 718	0.122 138
7	0.082 363	0.104 445	0.123 449	0.137 677	0.146 234	0.149 003	0.146 484	0.139 587
8	0.046 329	0.065 278	0.084 871	0.103 258	0.118 815	0.130 377	0.137 329	0.139 587
9	0.023 165	0.036 266	0.051 866	0.068 838	0.085 811	0.101 405	0.114 440	0.124 077
10	0.010 424	0.018 133	0.028 526	0.041 303	0.055 777	0.070 983	0.085 830	0.099 262
11	0.004 264	0.008 242	0.014 263	0.022 529	0.032 959	0.045 171	0.058 521	0.072 190
12	0.001 599	0.003 434	0.006 537	0.011 264	0.017 853	0.026 350	0.036 575	0.048 1[illegible]
13	0.000 554	0.001 321	0.002 766	0.005 199	0.008 926	0.014 188	0.021 101	0.029 [illegible]
14	0.000 178	0.000 472	0.001 087	0.002 228	0.004 144	0.007 094	0.011 304	0.016 [illegible]
15	0.000 053	0.000 157	0.000 398	0.000 891	0.001 796	0.003 311	0.005 652	0.009 [illegible]5
16	0.000 015	0.000 049	0.000 137	0.000 334	0.000 730	0.001 448	0.002 649	0.004 513
17	0.000 004	0.000 014	0.000 044	0.000 118	0.000 279	0.000 596	0.001 169	0.002 124
18	0.000 001	0.000 004	0.000 014	0.000 039	0.000 101	0.000 232	0.000 487	0.000 944
19		0.000 001	0.000 004	0.000 012	0.000 034	0.000 085	0.000 192	0.000 397
20			0.000 001	0.000 004	0.000 011	0.000 030	0.000 072	0.000 159
21				0.000 001	0.000 003	0.000 010	0.000 026	0.000 061
22					0.000 001	0.000 003	0.000 009	0.000 022
23						0.000 001	0.000 003	0.000 008
24							0.000 001	0.000 003
25								0.000 001

k \ λ	8.5	9.0	9.5	10	12	15	18	20
0	0.000 203	0.000 123	0.000 075	0.000 045	0.000 006	0.000 000	0.000 000	0.000 000
1	0.001 729	0.001 111	0.000 711	0.000 454	0.000 074	0.000 005	0.000 000	0.000 000
2	0.007 350	0.004 998	0.003 378	0.002 270	0.000 442	0.000 034	0.000 002	0.000 000
3	0.020 826	0.014 994	0.010 696	0.007 567	0.001 770	0.000 172	0.000 015	0.000 003
4	0.044 255	0.033 737	0.025 403	0.018 917	0.005 309	0.000 645	0.000 067	0.000 014
5	0.075 233	0.060 727	0.048 266	0.037 833	0.012 741	0.001 936	0.000 240	0.000 055
6	0.106 581	0.091 090	0.076 421	0.063 055	0.025 481	0.004 839	0.000 719	0.000 183
7	0.129 419	0.117 116	0.103 714	0.090 079	0.043 682	0.010 370	0.001 850	0.000 523

附表 1（续）

k \ λ	8.5	9.0	9.5	10	12	15	18	20
8	0.137 508	0.131 756	0.123 160	0.112 599	0.065 523	0.019 444	0.004 163	0.001 309
9	0.129 869	0.131 756	0.130 003	0.125 110	0.087 364	0.032 407	0.008 325	0.002 908
10	0.110 388	0.118 580	0.123 502	0.125 110	0.104 837	0.048 611	0.014 985	0.005 816
11	0.085 300	0.097 020	0.106 661	0.113 736	0.114 368	0.066 287	0.024 521	0.010 575
12	0.060 421	0.072 765	0.084 440	0.094 780	0.114 368	0.082 859	0.036 782	0.017 625
13	0.039 506	0.050 376	0.061 706	0.072 908	0.105 570	0.095 607	0.050 929	0.027 116
14	0.023 986	0.032 384	0.041 872	0.052 077	0.090 489	0.102 436	0.065 480	0.038 737
15	0.013 592	0.019 431	0.026 519	0.034 718	0.072 391	0.102 436	0.078 576	0.051 649
16	0.007 221	0.010 930	0.015 746	0.021 699	0.054 293	0.096 034	0.088 397	0.064 561
17	0.003 610	0.005 786	0.008 799	0.012 764	0.038 325	0.084 736	0.093 597	0.075 954
18	0.001 705	0.002 893	0.004 644	0.007 091	0.025 550	0.070 613	0.093 597	0.084 394
19	0.000 763	0.001 370	0.002 322	0.003 732	0.016 137	0.055 747	0.088 671	0.088 835
20	0.000 324	0.000 617	0.001 103	0.001 866	0.009 682	0.041 810	0.079 804	0.088 835
21	0.000 131	0.000 264	0.000 499	0.000 889	0.005 533	0.029 865	0.068 403	0.084 605
22	0.000 051	0.000 108	0.000 215	0.000 404	0.003 018	0.020 362	0.055 966	0.076 914
23	0.000 019	0.000 042	0.000 089	0.000 176	0.001 574	0.013 280	0.043 800	0.066 881
24	0.000 007	0.000 016	0.000 035	0.000 073	0.000 787	0.008 300	0.032 850	0.055 735
25	0.000 002	0.000 006	0.000 013	0.000 029	0.000 378	0.004 980	0.023 652	0.044 588
26	0.000 001	0.000 002	0.000 005	0.000 011	0.000 174	0.002 873	0.016 374	0.034 298
27		0.000 001	0.000 002	0.000 004	0.000 078	0.001 596	0.010 916	0.025 406
28			0.000 001	0.000 001	0.000 033	0.000 855	0.007 018	0.018 147
29				0.000 001	0.000 014	0.000 442	0.004 356	0.012 515
30					0.000 005	0.000 221	0.002 613	0.008 344
31					0.000 002	0.000 107	0.001 517	0.005 383
32					0.000 001	0.000 050	0.000 854	0.003 364
33						0.000 023	0.000 466	0.002 039
34						0.000 010	0.000 246	0.001 199
35						0.000 004	0.000 127	0.000 685
36						0.000 002	0.000 063	0.000 381
37						0.000 001	0.000 031	0.000 206
38							0.000 015	0.000 108
39							0.000 007	0.000 056

附表 2　标准正态分布表

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=P\{\xi\leqslant x\}$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500 0	0.504 0	0.508 0	0.512 0	0.516 0	0.519 9	0.523 9	0.527 9	0.531 9	0.535 9
0.1	0.539 8	0.543 8	0.547 8	0.551 7	0.555 7	0.559 6	0.563 6	0.567 5	0.571 4	0.575 3
0.2	0.579 3	0.583 2	0.587 1	0.591 0	0.594 8	0.598 7	0.602 6	0.606 4	0.610 3	0.614 1
0.3	0.617 9	0.621 7	0.625 5	0.629 3	0.633 1	0.636 8	0.640 6	0.644 3	0.648 0	0.651 7
0.4	0.655 4	0.659 1	0.662 8	0.666 4	0.670 0	0.673 6	0.677 2	0.680 8	0.684 4	0.687 9
0.5	0.691 5	0.695 0	0.698 5	0.701 9	0.705 4	0.708 8	0.712 3	0.715 7	0.719 0	0.722 4
0.6	0.725 7	0.729 1	0.732 4	0.735 7	0.738 9	0.742 2	0.745 4	0.748 6	0.751 7	0.754 9
0.7	0.758 0	0.761 1	0.764 2	0.767 3	0.770 3	0.773 4	0.776 4	0.779 4	0.782 3	0.758 2
0.8	0.788 1	0.791 0	0.793 9	0.796 7	0.799 5	0.802 3	0.805 1	0.807 8	0.810 6	0.813 3
0.9	0.815 9	0.818 6	0.821 2	0.823 8	0.826 4	0.828 9	0.831 5	0.834 0	0.836 5	0.838 9
1.0	0.841 3	0.843 8	0.846 1	0.848 5	0.850 8	0.853 1	0.855 4	0.857 7	0.859 9	0.862 1
1.1	0.864 3	0.866 5	0.868 6	0.870 8	0.872 9	0.874 9	0.877 0	0.879 0	0.881 0	0.883 0
1.2	0.884 9	0.886 9	0.888 8	0.890 7	0.892 5	0.894 4	0.896 2	0.898 0	0.899 7	0.901 5
1.3	0.903 2	0.904 9	0.906 6	0.908 2	0.909 9	0.911 5	0.913 1	0.914 7	0.916 2	0.917 7
1.4	0.919 2	0.920 7	0.922 2	0.923 6	0.925 1	0.926 5	0.927 8	0.929 2	0.930 6	0.931 9
1.5	0.933 2	0.934 5	0.935 7	0.937 0	0.938 2	0.939 4	0.940 6	0.941 8	0.943 0	0.944 1
1.6	0.945 2	0.946 3	0.947 4	0.948 4	0.949 5	0.950 5	0.951 5	0.952 5	0.953 5	0.954 5
1.7	0.955 4	0.956 4	0.957 3	0.958 2	0.959 1	0.959 9	0.960 8	0.961 6	0.962 5	0.963 3
1.8	0.964 1	0.964 8	0.965 6	0.966 4	0.967 1	0.967 8	0.968 6	0.969 3	0.969 9	0.970 6
1.9	0.971 3	0.971 9	0.972 6	0.973 2	0.973 8	0.974 4	0.975 0	0.975 6	0.976 2	0.976 7
2.0	0.977 2	0.977 8	0.978 3	0.978 8	0.979 3	0.979 8	0.980 3	0.980 8	0.981 2	0.981 7
2.1	0.982 1	0.982 6	0.983 0	0.983 4	0.983 8	0.984 2	0.984 6	0.985 0	0.985 4	0.985 7
2.2	0.986 1	0.986 4	0.986 8	0.987 1	0.987 4	0.987 8	0.988 1	0.988 4	0.988 7	0.989 0
2.3	0.989 3	0.989 6	0.989 8	0.990 1	0.990 4	0.990 6	0.990 9	0.991 1	0.991 3	0.991 6
2.4	0.991 8	0.992 0	0.992 2	0.992 5	0.992 7	0.992 9	0.993 1	0.993 2	0.993 4	0.993 6
2.5	0.993 8	0.994 0	0.994 1	0.994 3	0.994 5	0.994 6	0.994 8	0.994 9	0.995 1	0.995 2
2.6	0.995 3	0.995 5	0.995 6	0.995 7	0.995 9	0.996 0	0.996 1	0.996 2	0.996 3	0.996 4
2.7	0.996 5	0.996 6	0.996 7	0.996 8	0.996 9	0.997 0	0.997 1	0.997 2	0.997 3	0.997 4
2.8	0.997 4	0.997 5	0.997 6	0.997 7	0.997 7	0.997 8	0.997 9	0.997 9	0.998 0	0.998 1
2.9	0.998 1	0.998 2	0.998 2	0.998 3	0.998 4	0.998 4	0.998 5	0.998 5	0.998 6	0.998 6
3.0	0.998 7	0.998 7	0.998 7	0.998 8	0.998 8	0.998 9	0.998 9	0.998 9	0.999 0	0.999 0

附表 3　χ^2 分布表

$$P\{\chi^2(n) > \chi_\alpha^2(n)\} = \alpha$$

n \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75
1	—	—	0.001	0.004	0.016	0.102
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.165
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.037
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	12.792
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	13.675
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	14.562
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	15.452
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	16.344
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	17.240
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	18.137
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	19.037
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	19.939
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	20.843
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	21.749
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	22.657
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	23.567
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	24.478
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	25.390
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	26.304
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	27.219
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	28.186
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	29.054
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	29.973
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	30.893

附表 3（续）

n \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	31.815
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	32.737
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660
41	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	34.585
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	35.510
43	22.859	24.398	26.785	28.965	31.625	36.436
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	37.363
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	38.291
n \ α	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	6.626	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	14.845	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	17.117	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	18.245	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	20.489	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	21.605	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	22.718	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	23.828	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	24.935	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	26.039	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	27.141	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	28.241	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	29.339	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	30.435	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	31.528	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	32.620	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993

附表 3（续）

n \ α	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
29	33.711	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	34.800	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	35.887	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	36.973	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	38.058	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	39.141	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	40.223	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	41.304	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	42.383	48.363	52.192	55.668	59.892	62.883
38	43.462	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	44.539	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
41	46.692	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053
42	47.766	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
43	48.840	55.230	59.304	62.990	67.459	70.616
44	49.913	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893
45	50.985	57.505	61.656	35.410	69.957	73.166

附表 4　t 分布表

$$P\{t(n) > t_\alpha(n)\} = \alpha$$

n \ α	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.000 0	3.077 7	6.313 8	12.706 2	31.820 7	63.657 4
2	0.816 5	1.885 6	2.920 0	4.302 7	6.964 6	9.924 8
3	0.764 9	1.637 7	2.353 4	3.182 4	4.540 7	5.840 9
4	0.740 7	0.533 2	2.131 8	2.776 4	3.746 9	4.604 1
5	0.726 7	1.475 9	2.015 0	2.570 6	3.364 9	4.032 2
6	0.717 6	1.439 8	1.943 2	2.446 9	3.142 7	3.707 4
7	0.711 1	1.414 9	1.894 6	2.364 6	2.998 0	3.499 5
8	0.706 4	1.396 8	1.859 5	2.306 0	2.896 5	3.355 4
9	0.702 7	1.383 0	1.833 1	2.262 2	2.821 4	3.249 8
10	0.699 8	1.372 2	1.812 5	2.228 1	2.763 8	3.169 3
11	0.697 4	1.363 4	1.795 9	2.201 0	2.718 1	3.105 8
12	0.695 5	1.356 2	1.782 3	2.178 8	2.681 0	3.054 5
13	0.693 8	1.350 2	1.770 9	2.160 4	2.650 3	3.012 3
14	0.692 4	1.345 0	1.761 3	2.144 8	2.624 5	2.976 8
15	0.691 2	1.340 6	1.753 1	2.131 5	2.602 5	2.946 7

附表 4（续）

n \ α	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
16	0.690 1	1.336 8	1.745 9	2.119 9	2.583 5	2.920 8
17	0.689 2	1.333 4	1.739 6	2.109 8	2.566 9	2.898 2
18	0.688 4	1.330 4	1.734 1	2.100 9	2.552 4	2.878 4
19	0.687 6	1.327 7	1.729 1	2.093 0	2.539 5	2.860 9
20	0.687 0	1.325 3	1.724 7	2.086 0	2.528 0	2.845 3
21	0.686 4	1.323 2	1.720 7	2.079 6	2.517 7	2.831 4
22	0.685 8	1.321 2	1.717 1	2.073 9	2.508 3	2.818 8
23	0.685 3	1.319 5	1.713 9	2.068 7	2.499 9	2.807 3
24	0.684 8	1.317 8	1.710 9	2.063 9	2.492 2	2.796 9
25	0.684 4	1.316 3	1.708 1	2.059 5	2.485 1	2.787 4
26	0.684 0	1.315 0	1.705 6	2.055 5	2.478 6	2.778 7
27	0.683 7	1.313 7	1.703 3	2.051 8	2.472 7	2.770 7
28	0.683 4	1.312 5	1.701 1	2.048 4	2.464 1	2.763 3
29	0.683 0	1.311 4	1.699 1	2.045 2	2.462 0	2.756 4
30	0.682 8	1.310 4	1.697 3	2.042 3	2.457 3	2.750 0
31	0.682 5	1.309 5	1.695 5	2.039 5	2.452 8	2.744 0
32	0.682 2	1.308 6	1.693 9	2.036 9	2.448 7	2.738 5
33	0.682 0	1.307 7	1.692 4	2.034 5	2.444 8	2.733 3
34	0.681 8	1.307 0	1.690 9	2.032 2	2.441 1	2.728 4
35	0.681 6	1.306 2	1.689 6	2.030 1	2.437 7	2.723 8
36	0.681 4	1.305 5	1.688 3	2.028 1	2.434 5	2.719 5
37	0.681 2	1.304 9	1.687 1	2.026 2	2.431 4	2.715 4
38	0.681 0	1.304 2	1.686 0	2.024 4	2.428 6	2.711 6
39	0.680 8	1.303 6	1.684 9	2.022 7	2.425 8	2.707 9
40	0.680 7	1.303 1	1.683 9	2.021 1	2.423 3	2.704 5
41	0.680 5	1.302 5	1.682 9	2.019 5	2.420 8	2.701 2
42	0.680 4	1.302 0	1.682 0	2.018 1	2.418 5	2.698 1
43	0.680 2	1.301 6	1.681 1	2.016 7	2.416 3	2.695 1
44	0.680 1	1.301 1	1.680 2	2.015 4	2.414 1	2.692 3
45	0.680 0	1.300 6	1.679 4	2.014 1	2.412 1	2.689 6

附表 5 F 分布表

$P\{F(n_1, n_2) > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \alpha$ （$\alpha = 0.10$）

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42
10	3.29	2.99	2.73	2.61	2.52	2.64	2.41	2.38	2.35	2.32
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60

附表 5（$\alpha=0.10$）（续）

n_2 \ n_1	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5014	5.13
4	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

附表 5（$\alpha = 0.05$）（续）

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.30
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83

附表 5（$\alpha=0.05$）（续）

n_2 \ n_1	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

附表 5（$\alpha=0.025$）（续）

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	647.8	799.5	664.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	368.6
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	7.76	6.89	6.62
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.23	4.20	4.10	4.03	3.96
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	3.75	2.68	2.61
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53
30	3.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05

附表 5（$\alpha=0.025$）（续）

n_2 \ n_1	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	976.7	984.9	993.1	997.2	1 001	1 006	1 010	1 014	1 018
2	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	3.25
18	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.60	2.50	2.39	2.32	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.91	1.85
28	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.18
30	2.41	2.13	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

附表 5（$\alpha=0.01$）（续）

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4 052	4 999.5	5 403	5 625	5 764	5 859	5 928	5 982	6 022	6 056
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23
4	21.20	18.00	16.59	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.36	5.20	5.06	4.94	4.85
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.48	4.28	4.14	4.03	3.94
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
16	8.52	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69
17	8.40	6.11	5.18	4.67	3.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26
23	7.88	5.66	4.75	4.26	3.94	9.71	3.54	3.41	3.30	3.17
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
40	7.31	5.18	4.31	3.38	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32

附表 5（$\alpha = 0.01$）（续）

n_2 \ n_1	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	6 106	6 157	6 209	6 235	6 261	6 287	6 313	6 339	6 366
2	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	9.88
7	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.75	2.67	2.58	2.49
20	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	3.17	3.063	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	2.80	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

习题答案

习题 1

1．（1）不可能事件；

（2）必然事件；

（3）随机事件；

（4）随机事件．

2．（1）$\Omega=\left\{\frac{0}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{n\times100}{n}\right\}$，$n$ 表示小班人数；

（2）$\Omega=\{10,11,12,\cdots,n,\cdots\}$；

（3）$\Omega=\{00,100,0100,0101,1010,0110,1100,0111,1011,1101,1110,1111\}$．

3．（1）$A\overline{B}\overline{C}$；

（2）$AB\overline{C}$；

（3）$A\cup B\cup C$；

（4）ABC；

（5）$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$；

（6）$\overline{A}\overline{B}\cup\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{C}$；

（7）$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$或$\overline{ABC}$；

（8）$AB\cup BC\cup AC$．

4．$B=A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$， $C=A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$．

5．$\frac{2\,197}{20\,825}$．

6．$\frac{221}{980}$．

7．（1）$\frac{1\,309}{1\,976}$；（2）$\frac{35}{988}$．

8．$\frac{132}{169}$．

9．0.85．

10．0.94．

11．0.91．

12．（1）$\frac{1}{12}$；（2）$\frac{1}{20}$．

13．（1）0.56；（2）0.94；（3）0.38．

14．（1）0.6；（2）$\frac{2}{3}$；（3）0.26．

15．0.5．

16．0.882．

17．0.707 5．

18．$\frac{1}{60}$．

19．（1）$\frac{1}{2}$；（2）$\frac{2}{9}$．

20．0.998．

21．$\frac{20}{21}$．

22．（1）0.308 7；（2）0.471 78．

23．0.051 2．

习题 2

1．ξ表示取到的合格品个数，$\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3$．

（1）$\{\xi=3\}$；（2）$\{\xi\geqslant 1\}$；（3）$\{\xi=2\}$；（4）$\{\xi\leqslant 1\}$．

2．$-\frac{2}{5}$．

3．$\lambda=\frac{1-p}{p}$．

4．随机变量ξ的分布律为

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

5. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{6}, & -1\leqslant x<2,\\ \dfrac{2}{3}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & 3\leqslant x.\end{cases}$

6. 随机变量ξ的分布律为

ξ	-2	-1	0	1	2	4
P	$\frac{4}{13}$	$\frac{16}{91}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{32}{91}$	$\frac{8}{91}$	$\frac{6}{91}$

7. $\xi\sim B(15,0.2)$，分布律为$P\{\xi=k\}=C_{15}^{k}\times0.2^{k}\times0.8^{15-k}\ (k=0,1,2,\cdots,15)$.

（1）0.250 1；（2）0.832 9；（3）0.612 9；（4）0.061 1.

8. 0.080 3.

9. 8.

10. （1）$\dfrac{1}{\pi}$；（2）$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{\pi}\arcsin x+\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant1.\end{cases}$

11. （1）e^{-1}；（2）$e^{-\frac{1}{2}}$.

12. （1）0.532 8；（2）0.999 6；（3）0.697 7；（4）0.498 7；（5）$C=3$.

13. e^{-3}.

14. $\sigma\leqslant227.3$.

15. $\dfrac{3}{5}$.

16. （1）

η	-1	0	1	2	3
P	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$

（2）

η	0	1	4
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{17}{30}$

17. （1）$\varphi_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ （2）$\varphi_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

18. $\varphi_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{2\ln y}{y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$

19. $P\{\xi=k\}=\dfrac{1}{n}(k=1,2,\cdots,n-1,n)$.

20. （1）1；（2）$\varphi(x)=\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$，$x\in\mathbf{R}$；（3）0.5.

21. 0.682 6.

22. $\varphi_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi^2\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

习题 3

1. (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0

2. X 的可能取值为 0，1，2，3，Y 的可能取值为 1，3，故 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	1	3
0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	0
2	$\frac{3}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{8}$

3.（1） $c=4$；

（2） $F(x,y)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\text{ 或 }y\leqslant 0,\\ (1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-2y}), & x>0\text{ 且 }y>0;\end{cases}$

（3） $P\{X+Y\leqslant 1\}=1-3\mathrm{e}^{-2}$.

4. $f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

5.（1） $f(x,y)=\begin{cases}4, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（2） $f_X(x)=\begin{cases}8x+4, & -\dfrac{1}{2}<x<0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}2-2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

6.（1） $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a(a-x)}, & 0<x<y<a,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（2） $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}[\ln a-\ln(a-y)], & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

7.（1） $X=2$ 时，Y 的条件分布律为

Y	1	2	3	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0

（2）$Y=1$时，X 的条件分布律为

X	1	2	3	4
P	$\frac{12}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$

8.（1） $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$（2） $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$；（3）$X$与 Y独立.

9. $c=1$， $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2x}, & |y|<-x, \\ 0, & 其他,\end{cases}$ $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{1-|y|}, & -1<x<-|y|, \\ 0, & 其他.\end{cases}$

10.（1） $f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1, \\ 0, & 其他,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}3y^2, & 0<y<1, \\ 0, & 其他;\end{cases}$

（2） $f_{Y|X}\left(y|x=\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$；

（3） $P\{X+Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{4}$.

11.（1） $a=\dfrac{1}{18}$， $b=\dfrac{2}{9}$， $c=\dfrac{1}{6}$；

（2）

X	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

12. $C=24$， X,Y不独立.

13. X,Y不独立.

14.（1） $Z=X+Y$的可能取值为0，1，2，3，4，其分布律如下；

Z	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

（2） $U=\max(X,Y)$的取值为0，1，2，其分布律如下；

U	0	1	2
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{27}{36}$

（3） $V=\min(X,Y)$的取值为0，1，2，其分布律如下.

V	0	1	2
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{4}$

习题 4

1．0；2.4；12.2．

2．$\frac{4}{3}$；$-\frac{1}{4}$；$\frac{11}{6}$；-1．

3．0.5．

4．1.055 6．

5．3；2．

6．10．

7．$\frac{\pi a^3}{24}$．

8．（1）$\frac{221}{144}$；（2）$\frac{221}{144}$．

9．6；0.4．

10．0；0.5．

11．λ^{-1}；λ^{-2}．

12．1 000；10．

13．（1）$1-e^{-2}$；（2）$10\left(1-e^{-\frac{1}{5}}\right)$；（3）$10e^{-\frac{1}{5}}\left(1-e^{-\frac{1}{5}}\right)$．

14．$\frac{3}{4}$；$\frac{1}{2}$；$\frac{3}{14}$；$-\frac{9}{56}$；$-\frac{\sqrt{5}}{5}$．

15．$\frac{7}{6}$；$\frac{4}{3}$；$-\frac{1}{36}$；$-\frac{1}{11}$．

16．1.8．

17．57；25．

18．略．

19．$\frac{8}{9}$．

20．不超过$\frac{1}{22.5}$．

21．0.878 8．

22. 0.473.
23. 141.5.
24. 537.

习题 5

1.（1）是；（2）不是；（3）是；（4）是；（5）不是；（6）是.
2. $\bar{x}=13.226$， $s^2=0.070\,53$.
3. $\bar{x}=40.52$， $s^2\approx 4.642$， $s\approx 2.154\,5$， $B_2\approx 4.177\,6$.
4.

x	1	2.2	2.5	3.1
f_n	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

5. $c=-1.81$.
6. $F(10,5)$.

习题 6

1. θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$； θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.
2. $C=\dfrac{1}{2(n-1)}$.
3. θ 的估计量和估计值分别为 $\hat{\theta}=\overline{X}$，$\hat{\theta}=\bar{x}=172.7$.
4. $\hat{\mu}=2\,809$，$\hat{\sigma}^2=1170.8$.
5. $(14.754, 15.146)$.
6. $(75.05, 84.95)$.
7. $(19.87, 20.15)$.
8. $(0.018\,8, 0.150\,8)$.
9. $(-3.59, 9.59)$.
10. $(0.003\,2, 0.129\,0)$.
11.（1） 40 394；（2） 2 342.

习题 7

1. 所估产量不正确.
2. 车床工作不正常.
3. 两种香烟的尼古丁含量无显著差异.
4. 这批导线电阻的标准差仍是 0.005.
5. 略.
6. 略.
7. 这两台机床加工零件精度有显著差异.
8. 这两批电子元件的电阻值的方差是一致的.

参考文献

[1] 盛骤，谢式千，潘承毅．概率论与数理统计［M］．4版．北京：高等教育出版社，2008．

[2] 陈江彬．概率论与数理统计［M］．上海：上海交通大学出版社，2016．

[3] 黎协锐，谭伟明．概率论与数理统计［M］．北京：航空工业出版社，2011．

[4] 吴赣昌．概率论与数理统计［M］．北京：中国人民大学出版社，2009．

[5] 梁飞豹，徐荣聪，刘文丽．概率论与数理统计［M］．北京：北京大学出版社，2005．

[6] 吴传生．经济数学——概率论与数理统计［M］．北京：高等教育出版社，2009．

[7] 彭美云．应用概率统计［M］．北京：机械工业出版社，2009．

[8] 周概容．概率论与数理统计［M］．北京：高等教育出版社，2008．

责任编辑：高莉莉
封面设计：刘幼峰
教学配套资源下载：www.bjjqe.com

如果您对本书有好的建议或意见，
请发至邮箱2012953621@qq.com

概率论与数理统计

GAI LV LUN
YU SHULI TONGJI

扫描二维码
关注E时代精品图书

ISBN 978-7-5165-1661-4

9 787516 516614

定价：43.80 元

中航出版传媒有限责任公司
CHINA AVIATION PUBLISHING & MEDIA CO., LTD.
www.aviationnow.com.cn