燎原®高数

大学数学·考研数学重要公式、定理及性质汇总

高等数学公式定理

教材公式精讲　定理性质汇总

一、函数与极限

1. 基本初等函数

函数分类	公式、定理
幂函数	表达式：$y = x^{\mu}(\mu \in \mathbf{R})$. 定义域：当 $\mu < 0$ 时，$x \neq 0$；当 $\mu = \frac{1}{2n}$ 时，$x \geqslant 0$；当 $\mu \geqslant 1$ 时，$x \in \mathbf{R}$，当 $\mu = \frac{1}{2n+1}$ 时，$x \in \mathbf{R}$
指数函数	表达式：$y = a^{x}(a > 0$ 且 $a \neq 1)$. 定义域：$x \in \mathbf{R}$
对数函数	表达式：$y = \log_a x(a > 0$ 且 $a \neq 1)$. 定义域：$x > 0$
三角函数	表达式：①$y = \sin x$；②$y = \cos x$；③$y = \tan x$；④$y = \cot x$，…. 定义域：①$x \in \mathbf{R}$；②$x \in \mathbf{R}$；③$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$；④$x \neq k\pi$，…
反三角函数	表达式：①$y = \arcsin x$；②$y = \arccos x$；③$y = \arctan x$，…. 定义域：①$\lvert x \rvert \leqslant 1$；②$\lvert x \rvert \leqslant 1$；③$x \in \mathbf{R}$

2. 极限

考　点	公　式
极限的定义	(1) 数列极限：$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. (2) 函数极限：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A$； $f_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$；$f_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$
极限的四则运算法则	若 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B(A, B$ 均为有限数$)$，则 $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$，$\lim f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$，$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$(当 $B \neq 0$)
两个重要准则	(1) 单调有界数列必有极限. (2) 夹逼准则： 若当 $x \in \{x \mid 0 < \lvert x - x_0 \rvert < h\}$(或 $\lvert x \rvert > M$) 时，恒有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$
两个重要极限	(1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. (2) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{y \to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}} = \mathrm{e}$. 重要公式：$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \infty, & m < n, \\ \frac{a_0}{b_0}, & m = n, \\ 0, & m > n \end{cases}$

3. **无穷小量**

考　点	公　式
无穷小的比较	设 $\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=0$: (1) 如果 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$,就说 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的高阶无穷小,记作 $\beta=o(\alpha)$. (2) 如果 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$,就说 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的低阶无穷小. (3) 如果 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=c(c\neq0)$,就说 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶无穷小. 特殊地,如果 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$,则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小,记作 $\alpha\sim\beta$. (4) 如果 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)^k}=c(c\neq0,k>0)$,就说 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小
常见的等价无穷小	(以下等价无穷小均是 $x\to0$ 时的情况) $\sin x\sim x,\arcsin x\sim x,\tan x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$
无穷小的性质	(1) 有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量. (2) 有限个无穷小量的积仍是无穷小量. (3) 无穷小量与有界函数的乘积仍是无穷小量. (4) 等价无穷小代换:设 $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 是自变量同一变化过程中的无穷小且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,$\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 存在,则 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=\lim\frac{\beta}{\alpha}$

二、一元函数微分学

1. **导数和微分**

考　点	公　式
导数与微分的定义	(1) 导数定义:$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 或 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. (2) 左右导数:$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$. (3) 微分:$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$, $dy=A\Delta x=f'(x)dx(\Delta x\to0)$
四则运算法则	设 $u=u(x),v=v(x)$ 均可导,则 (1)$(u\pm v)'=u'\pm v',d(u\pm v)=du\pm dv$. (2)$(uv)'=u'v+uv',d(uv)=udv+vdu$. 若 $u(x),v(x)$ 均 n 阶可导,则有莱布尼茨公式: $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$,其中 $u^{(0)}=u,v^{(0)}=v$. (3) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2},d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}(v\neq0)$

考点	公式
基本初等函数的导数公式	(1) $C'=0$. (2) $(x^{a})'=ax^{a-1}$. (3) $(a^{x})'=a^{x}\ln a,(e^{x})'=e^{x}$. (4) $(\log_{a}x)'=\frac{1}{x\ln a},(\ln x)'=\frac{1}{x}$. (5) $(\sin x)'=\cos x$. (6) $(\cos x)'=-\sin x$. (7) $(\tan x)'=\sec^{2}x=\frac{1}{\cos^{2}x}$. (8) $(\cot x)'=-\csc^{2}x=-\frac{1}{\sin^{2}x}$. (9) $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$. (10) $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$. (11) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$. (12) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$. (13) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^{2}}$. (14) $(\operatorname{arccot}x)'=-\frac{1}{1+x^{2}}$
基本初等函数的微分公式	(1) $d(C)=0$. (2) $d(x^{a})=ax^{a-1}dx$. (3) $d(\ln\|x\|)=\frac{1}{x}dx$. (4) $d(\log_{a}\|x\|)=\frac{1}{x\ln a}dx$. (5) $d(e^{x})=e^{x}dx$. (6) $d(a^{x})=\ln a\cdot a^{x}dx$. (7) $d(\sin x)=\cos xdx$. (8) $d(\cos x)=-\sin xdx$. (9) $d(\tan x)=\sec^{2}xdx$. (10) $d(\cot x)=-\csc^{2}xdx$. (11) $d(\sec x)=\sec x\tan xdx$. (12) $d(\csc x)=-\csc x\cot xdx$. (13) $d(\operatorname{sh}x)=\operatorname{ch}xdx$. (14) $d(\operatorname{ch}x)=\operatorname{sh}xdx$. (15) $d(\operatorname{th}x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^{2}x}dx$. (16) $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$. (17) $d(\arccos x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$. (18) $d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^{2}}dx$. (19) $d(\operatorname{arccot}x)=\frac{-1}{1+x^{2}}dx$. (20) $d(\operatorname{arsh}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}dx$. (21) $d(\operatorname{arch}x)=\frac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}dx$. (22) $d(\operatorname{arth}x)=\frac{1}{1-x^{2}}dx$
几类常用求导法则(Ⅰ)	(1) 复合函数求导法则:设 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导,$y=f(u)$ 在 $u=\varphi(x)$ 可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导,且$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 或 $y_{x}'=y_{u}'\cdot u_{x}'$. (2) 反函数求导法则:设 $y=f(x)$ 在(a,b) 内可导且 $f'(x)\neq0$,则其反函数 $x=\varphi(y)$ 也可导且反函数的导数为$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 或 $x_{y}'=\frac{1}{y_{x}'}$. (3) 参数方程求导法则:设函数 $y=f(x)$ 由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}(\alpha<t<\beta)$ 给出,其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 都在(α,β) 内可导,且 $\varphi'(t)\neq0$,则 $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^{3}}$

考　点	公　式
几类常用求导法则(Ⅱ)	(4) 隐函数求导法则:由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 称为 y 是自变量 x 的隐函数,求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的方法有以下两种: ① 在方程两边分别对 x 求导,特别要注意 y 是 x 的函数,于是 y 的函数对 x 来说就是复合函数; ② 利用一阶微分形式不变性,在方程两边求微分,然后解出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
常用高阶导公式	(1) $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$. (2) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. (3) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. (4) $[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. (5) $(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$. (6) $(u\cdot v)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$,其中 $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$,$u(x)$、$v(x)$ 有 n 阶导数(这个公式称莱布尼茨公式)
切线与法线	切线方程:$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. 法线方程:$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ 且 $f'(x_0)\neq 0$

2. **微分中值定理**

考　点	公式、定理
罗尔定理	设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)$,则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)=0,\xi\in(a,b)$
拉格朗日中值定理	设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\xi\in(a,b)$
柯西中值定理	设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,且 $g'(x)\neq 0$,则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
泰勒中值定理(Ⅰ)	(1) 泰勒公式:设函数 $f(x)$ 在 x_0 处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数,则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x,在 x_0 与 x 之间至少存在一点 ξ,使得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$,其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,它称为 $f(x)$ 在 x_0 处的拉格朗日型余项.在不需要余项的精确表达式时,n 阶泰勒公式也可以写成

考　点	公式、定理
泰勒中值定理(Ⅱ)	$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$, 其中 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$,它称为 $f(x)$ 在 x_0 处的佩亚诺型余项. 若令 $x_0=0$,则 n 阶泰勒公式成为 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$, 称为 n 阶带佩亚诺型余项的麦克劳林公式
常用的麦克劳林公式	$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$, $(x\to0)$. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})$, $(x\to0)$. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$, $(x\to0)$. $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$, $(x\to0)$. $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$, $(x\to0)$
洛必达法则	(1) $\dfrac{0}{0}$ 型. ① 设 $f(x),F(x)$ 在 a 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}F(x)=0$; ② $f(x),F(x)$ 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上可导,且 $F'(x)\neq0$; ③ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=k$($k$ 有限或 $\pm\infty$)(a 可以是 $\pm\infty$),则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=k$. (2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型. ① 设 $f(x),F(x)$ 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}F(x)=\infty$($a$ 可以任意); ② $f(x),F(x)$ 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 可导,且 $F'(x)\neq0$; ③ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=k$($k$ 有限或 $\pm\infty$)(a 可以是 $\pm\infty$),则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=k$

3. **导数的应用**

考　点	公式、定理
函数的单调性、凹凸性、极值(Ⅰ)	(1) 可导函数单调性的判别法:设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,并在 (a,b) 上可导,则 ① $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增 $\Leftrightarrow f'(x)\geqslant0,x\in(a,b)$; ② $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减 $\Leftrightarrow f'(x)\leqslant0,x\in(a,b)$. (2) 凹凸性的判别:设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数 $f''(x)$,如果在 (a,b) 内的每一点 x,恒有 $f''(x)>0$,则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是凹的;如果在 (a,b) 内的每一点 x,恒有 $f''(x)<0$,则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的

考　点	公式、定理
函数的单调性、凹凸性、极值(Ⅱ)	(3) 函数极值的判别条件: 极值的第一充分条件:设 $f(x)$ 在 x_0 处连续,在 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 内可导,$f'(x_0)$ 不存在,或 $f'(x_0)=0$. ① 如果在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内的任一点 x 处,有 $f'(x)>0$,而在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的任一点 x 处,有 $f'(x)<0$,则 $f(x_0)$ 为极大值,x_0 为极大值点; ② 如果在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内的任一点 x 处,有 $f'(x)<0$,而在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的任一点 x 处,有 $f'(x)>0$,则 $f(x_0)$ 为极小值,x_0 为极小值点; ③ 如果在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内与 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的任一点 x 处,$f'(x)$ 的符号相同,那么 $f(x_0)$ 不是极值,x_0 不是极值点. 极值的第二充分条件:设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数,且 $f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\neq 0$,则当 $f''(x_0)<0$ 时,$f(x_0)$ 为极大值,x_0 为极大值点;当 $f''(x_0)>0$ 时,$f(x_0)$ 为极小值,x_0 为极小值点
渐近线	(1) 铅直渐近线:若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$,则 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线. (2) 水平渐近线:若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,则 $y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线. (3) 斜渐近线:若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$,则 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线
弧微分、曲率	(1) 弧微分公式:$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ (2) 平均曲率:记单位弧段上切线转过的角度的大小为 $\Delta\alpha$,则平均曲率 $\bar{K}=\left\|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right\|$,其中 $\Delta s=\overset{\frown}{MM'}$. (3) 曲率:平均曲率的极限叫作曲线在点 M 处的曲率,记作 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left\|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right\|$. (4) 曲率圆与曲率半径:设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $K(K\neq 0)$. 在点 M 处的曲线的法线上凹的一侧取一点 D,使 $\|MD\|=\dfrac{1}{K}=\rho$,以 D 为圆心,ρ 为半径的圆叫作曲线在 M 处的曲率圆,ρ 叫 M 处的曲率半径. (5) 曲率中心(渐屈线)的计算公式:曲线 $y=f(x)$ 具有二阶导数 y'',且 $y''\neq 0$,设曲线在点 $M(x,y)$ 处的曲率中心为 $D(\alpha,\beta)$,则有 $$\begin{cases}\alpha=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''},\\ \beta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$$

三、一元函数积分学

1. 不定积分

考点	公式
基本性质	设$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$,其中 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,C 为任意常数. 则 (1)$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 或$\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C$. (2)$[\int f(x)\mathrm{d}x]' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x] = f(x)\mathrm{d}x$. (3)$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$. (4)$\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$
基本积分公式	(1)$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq -1$,实常数). (2)$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\mid x\mid + C$. (3) $\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^{x}+C(a>0,a\neq 1)$;$\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x}+C$. (4)$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$. (5)$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$. (6)$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$. (7)$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$. (8)$\int \tan x\sec x\mathrm{d}x = \sec x + C$. (9)$\int \cot x\csc x\mathrm{d}x = -\csc x + C$. (10)$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln\mid\cos x\mid + C$. (11)$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln\mid\sin x\mid + C$. (12)$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln\mid\sec x+\tan x\mid + C$. (13)$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln\mid\csc x-\cot x\mid + C$. (14)$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C(a>0)$. (15)$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\ (a>0)$. (16)$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\mid\frac{a+x}{a-x}\mid + C(a>0)$. (17)$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\mid x+\sqrt{x^2\pm a^2}\mid + C(a>0)$

续表

考点	公式
换元积分法（Ⅰ）	1. 第一换元积分法（凑微分法）：设$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$，又 $\varphi(x)$ 可导，则 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)\overset{\text{令 } u=\varphi(x)}{=\!=\!=\!=\!=}\int f(u)\mathrm{d}u$ $=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C.$ 常用的几种凑微分形式： (1)$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)(a\neq 0).$ (2)$\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)(a\neq 0,n\neq 0).$ (3)$\int f(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x).$ (4)$\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right).$ (5)$\int f(\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x}).$ (6)$\int f(a^x)a^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int f(a^x)\mathrm{d}(a^x)(a>0,a\neq 1).$ $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x).$ (7)$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x).$ (8)$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x).$ (9)$\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x).$ (10)$\int f(\cot x)\csc^2 x\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x).$ (11)$\int f(\sec x)\sec x\tan x\mathrm{d}x=\int f(\sec x)\mathrm{d}(\sec x).$ (12)$\int f(\csc x)\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\int f(\csc x)\mathrm{d}(\csc x).$ (13)$\int\frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x).$ (14)$\int\frac{f(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int f(\arccos x)\mathrm{d}(\arccos x).$ (15)$\int\frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x).$ (16)$\int\frac{f(\mathrm{arccot}\, x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\int f(\mathrm{arccot}\, x)\mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x).$ (17)$\int\frac{f\left(\arctan\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\int f\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\arctan\frac{1}{x}\right).$ (18)$\int\frac{f[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\int f[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]\mathrm{d}[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})](a>0)$

<table>
<tr><th>考　点</th><th>公　式</th></tr>
<tr><td>换元积分法（Ⅱ）</td><td>
(19) $\int \frac{f[\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})]}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x$
$=\int f[\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})]\mathrm{d}[\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})](a>0)$.
(20) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\ln|f(x)|+C[f(x)\neq 0]$.
2. 第二换元积分法：设 $x=\varphi(t)$ 可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，若 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=G(t)+C$，
则 $\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{令 x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=G(t)+C=G[\varphi^{-1}(x)]+C$，其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数.
常用的几种变量代换：
(1) 三角代换：
① 被积函数含有根式 $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$ 或 $x=a\cos t$；
② 被积函数含有根式 $\sqrt{x^2+a^2}$，令 $x=a\tan t$；
③ 被积函数含有根式 $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=\pm a\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$.
(2) 倒代换：$x=\frac{1}{t}$.
(3) 根式代换：被积函数中含有 $\sqrt[n]{ax+b}$，令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$
</td></tr>
<tr><td>分部积分法</td><td>
设 $u(x),v(x)$ 均有连续的导数，则 $\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$
或 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$.
几种常见的分部积分类型：
<table>
<tr><th>积分类型</th><th>$u(x)$、$\mathrm{d}v(x)$ 的选择</th></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)e^{kx}\mathrm{d}x$</td><td>$u(x)=P_n(x),\mathrm{d}v(x)=e^{kx}\mathrm{d}x$</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)\sin(ax+b)\mathrm{d}x$</td><td>$u(x)=P_n(x),\mathrm{d}v(x)=\sin(ax+b)\mathrm{d}x$</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)\cos(ax+b)\mathrm{d}x$</td><td>$u(x)=P_n(x),\mathrm{d}v(x)=\cos(ax+b)\mathrm{d}x$</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)\ln x\mathrm{d}x$</td><td>$u(x)=\ln x,\mathrm{d}v(x)=P_n(x)\mathrm{d}x$</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)\arcsin(ax+b)\mathrm{d}x$</td><td>$u(x)=\arcsin(ax+b),\mathrm{d}v(x)=P_n(x)\mathrm{d}x$</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)\arccos(ax+b)\mathrm{d}x$</td><td>$u(x)=\arccos(ax+b),\mathrm{d}v(x)=P_n(x)\mathrm{d}x$</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)\arctan(ax+b)\mathrm{d}x$</td><td>$u(x)=\arctan(ax+b),\mathrm{d}v(x)=P_n(x)\mathrm{d}x$</td></tr>
<tr><td>$\int e^{kx}\sin(ax+b)\mathrm{d}x$</td><td>$u(x),\mathrm{d}v(x)$ 的选择随意</td></tr>
<tr><td>$\int e^{kx}\cos(ax+b)\mathrm{d}x$</td><td>$u(x),\mathrm{d}v(x)$ 的选择随意</td></tr>
</table>
注：表中 a,b,k 均为常数，$P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式
</td></tr>
</table>

续表

考　点	公　式
有理函数的积分	有理函数的积分总可以化为整式和如下四种类型的积分： (1) $\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\mid x-a\mid + C.$ (2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = -\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C(n>1).$ (3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}]^n} \xlongequal[\text{令}\frac{4q-p^2}{4}=a^2]{\text{令}x+\frac{p}{2}=u} \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^n}.$ (4) $\int \frac{x+a}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$ $= -\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + (a-\frac{p}{2})\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n},$ 其中 $p^2-4q<0$

2. **定积分**

考　点	公　式
基本性质	(1) 定积分关于被积函数的可加性：$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$ (2) 定积分关于积分区间的可加性：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$ (3) 定积分的数乘性质：$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$($k$ 为常数). (4) $\int_a^b \mathrm{d}x = b-a.$ (5) 若在$[a,b]$上 $f(x)\geqslant 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0(a<b).$ (6) 若在$[a,b]$上 $f(x)\geqslant g(x)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x(a<b).$ (7) $\left\|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right\| \leqslant \int_a^b \mid f(x)\mid \mathrm{d}x(a<b).$ (8) 设 $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x), m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$，则 $m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)(a<b).$ (9)（定积分中值定理） 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $\exists\,\xi\in[a,b]$ 满足$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$ (10) 牛顿－莱布尼茨公式： 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在$[a,b]$上任意一个原函数，则有 $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big\|_a^b = F(b)-F(a)$

续表

考　点	公　式
换元法和分部积分法	(1) 定积分的换元积分法： 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$x=\varphi(t)$ 满足 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$ 且当 t 从 $\alpha\to\beta$ 时，对应的 x 从 $a\to b$；$\varphi'(t)$ 在$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$) 连续，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$ (2) 定积分的分部积分法： 设 $u(x)$，$v(x)$ 在$[a,b]$上有连续的导函数，则 $\int_a^b u\mathrm{d}v=[uv]\Big\vert_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u$ 或 $\int_a^b uv'\mathrm{d}x=[uv]\Big\vert_b^a-\int_a^b vu'\mathrm{d}x$
常用积分公式	(1) 两个特殊函数的定积分计算公式： ① 奇、偶函数在对称区间上的定积分 设 $f(x)$ 在$[-a,a]$上连续，则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{ 为奇函数},\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 为偶函数}.\end{cases}$ ② 周期函数的定积分 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x, a\in\mathbf{R}.$ $\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x, a\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{N}.$ (2) 三角函数的定积分公式： 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x,$ $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x,$ $\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x,$ $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$ $=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n\text{ 为大于 1 的正奇数}\end{cases}$

3. **定积分的应用**

考点	公式
平面曲线的弧长公式	(1) 参数方程下：设曲线弧由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$给出，其中$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数，则曲线弧弧长为$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$. (2) 直角坐标系下： 光滑曲线弧方程为$y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则曲线弧弧长为 $s=\int_{a}^{b}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$. (3) 极坐标系下： 光滑曲线方程为$\rho=\rho(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$，则曲线弧弧长为$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$
旋转体侧面积公式	(1) 参数方程下： 光滑曲线$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$，绕$x$轴旋转所成旋转体的侧面积 $A_x=2\pi\int_{t_1}^{t_2}y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$. (2) 直角坐标系下： ① 光滑曲线$y=f(x),a\leqslant x\leqslant b$，绕$x$轴旋转所成旋转体的侧面积 $A_x=2\pi\int_{a}^{b}f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$. ② 光滑曲线$x=\varphi(y),c\leqslant y\leqslant d$，绕$y$轴旋转所成旋转体的侧面积 $A_y=2\pi\int_{c}^{d}\varphi(y)\sqrt{1+[\varphi'(y)]^2}\,\mathrm{d}y$. (3) 极坐标系下： 光滑曲线$\rho=\rho(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，绕$x$轴旋转所成旋转体的侧面积 $A_x=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\theta)\sin\theta\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$

4. **反常积分**

考点	公式
无穷积分	$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$[先求定积分$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$，再令$b\to+\infty$求极限]. $\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$[先求定积分$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$，再令$a\to-\infty$求极限]. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}f(x)\mathrm{d}x+\lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}f(x)\mathrm{d}x$[先求定积分$\int_{0}^{b}f(x)\mathrm{d}x,\int_{a}^{0}f(x)\mathrm{d}x$再令$b\to+\infty,a\to-\infty$求极限]

考点	公式
瑕积分	(1)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 其中 a 为瑕点，即 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$： $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$[先求定积分 $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 再令 $\varepsilon\to0^+$ 求极限]. (2)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 其中 b 为瑕点，即 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$： $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$[先求定积分 $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$ 再令 $\varepsilon\to0^+$ 求极限]. (3)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$a<c<b$，c 为瑕点： $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\varepsilon_1\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x+\lim\limits_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\mathrm{d}x$
反常积分审敛法(Ⅰ)	(1) 无穷限反常积分的审敛法： ① 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)\geqslant0$. 若函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. ② 比较审敛法 设 $f(x)$、$\varphi(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续， ⅰ. 若 $\exists B$，当 $x\geqslant B$ 时，$0\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x)$，则由 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；由 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 发散. ⅱ. 若 $f(x)\geqslant0$ 且 $\exists M>0$，$p>1$，使得 $f(x)\leqslant\dfrac{M}{x^p}(a\leqslant x<+\infty)$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；若 $\exists N>0$ 使得 $f(x)>\dfrac{N}{x}(a\leqslant x<+\infty)$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散. ③ 极限审敛法 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 内连续且 $f(x)\geqslant0$，若 $\exists p>1$ 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)$ 存在，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；若 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=d>0$[或 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=+\infty$]，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散. ④ 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内连续，若反常积分 $\int_a^{+\infty}\lvert f(x)\rvert\mathrm{d}x$ 收敛，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛

考　点	公　式
反常积分审敛法(Ⅱ)	(2) 无界函数的反常积分的审敛法: ① 比较审敛法 设 $f(x)$ 在$(a,b]$上连续且 $f(x)\geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$,若 $\exists M>0$ 及 $q<1$ 使得 $f(x)\leqslant\dfrac{M}{(x-a)^q}(a<x\leqslant b)$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛;若 $\exists N>0$ 及 $q\geqslant 1$ 使得 $f(x)\geqslant\dfrac{N}{(x-a)^q}(a<x\leqslant b)$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散. ② 极限审敛法 设 $f(x)$ 在$(a,b]$上连续且 $f(x)\geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$,若 $\exists 0<q<1$ 使 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)$ 存在,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛;若 $\exists q\geqslant 1$ 使 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)=d>0$[或 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)f(x)=+\infty$],则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散
两个重要结论	(1) 无穷积分$\int_a^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}(a>0)$,当 $p>1$ 时收敛;当 $p\leqslant 1$ 时发散. (2) 瑕积分$\int_a^b\dfrac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$,当 $p<1$ 时收敛;当 $p\geqslant 1$ 时发散
Γ 函数	(1)Γ 函数的定义:$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x(s>0)$. (2)Γ 函数的性质: ①$s>0$ 时此反常积分收敛; ② 递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ $(s>0)$,特别地 $\Gamma(n+1)=n!$; ③ 当 $s\to 0^+$ 时,$\Gamma(s)\to+\infty$; ④ 余元公式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}(0<s<1)$,特别地 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

四、微分方程

1. 一阶微分方程

微分方程种类	通解公式或解法
可分离变量的微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$,其中 $f(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$	解法:$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ $\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\varphi_2(y)}=\varphi_1(x)\mathrm{d}x$ $\Rightarrow\int\dfrac{\mathrm{d}y}{\varphi_2(y)}=\int\varphi_1(x)\mathrm{d}x$

微分方程种类	通解公式或解法
齐次微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$,其中$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$	解法:$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, 令$\frac{y}{x}=u\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$ $\Rightarrow\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$
一阶齐次线性微分方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$	通解公式:$y=Ce^{-\int P(x)dx}$(其中C为任意常数)
一阶非齐次线性微分方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$	通解公式: $y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]e^{-\int P(x)dx}$ (其中C为任意常数)
伯努利方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq0,1)$	解法:$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$, 令$y^{1-n}=z\Rightarrow\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$
全微分方程$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$,其中$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$	解法:令$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, 则$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du$,原方程的通解为$u(x,y)=C$

2. **高阶微分方程**

考　点	公　式
二阶常系数 齐次线性方程 $y''+py'+qy=0$①	对应特征方程为$r^2+pr+q=0$②,根据特征方程的两个根的不同情形,微分方程的通解如下: (1)②有实根$r_1\neq r_2$,则①的通解为$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$. (2)②有实根$r_1=r_2=r$,则①的通解为$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$. (3)②有复根$r_{1,2}=\alpha+i\beta$,则①的通解为$y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$

考点	公式
二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$	特解构造法： (1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型，则可用待定系数法构造特解为 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$，其中 $k=\begin{cases}0, & \lambda\text{ 不是特征根},\\ 1, & \lambda\text{ 是单重特征根},\\ 2, & \lambda\text{ 是两重特征根},\end{cases}$ $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次(m 次)的多项式. (2) $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型，则构造特解为 $y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$， 其中 $k=\begin{cases}0, & \lambda+\omega\mathrm{i}\text{ 不是特征根},\\ 1, & \lambda+\omega\mathrm{i}\text{ 是特征根},\end{cases}$ $R_m^{(1)}(x)$，$R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式，$m=\max\{l,n\}$
可降阶的高阶微分方程	(1) $y^{(n)}=f(x)$ 对 $y^{(n)}=f(x)$ 进行 n 次不定积分. (2) $f(x,y',y'')=0$ 令 $y'=p$，$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，$f(x,y',y'')=0$ 化为 $f\left(x,p,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)=0$. (3) $f(y,y',y'')=0$ $y'=p,y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$， $f(y,y',y'')=0$ 化为 $f\left(y,p,p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)=0$
欧拉方程	(1) 方程的形式： $x^ny^{(n)}+P_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}xy'+P_ny=f(x)$. (2) 解法： 设 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$，记 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则 $x^ky^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y$， 将原方程化成常系数线性微分方程求解

五、向量代数与空间解析几何

1. 向量代数

<table>
<tr><th>考　点</th><th>公　式</th></tr>
<tr><td>向量的概念
及线性运算</td><td>
(1) 向量：既有大小又有方向的量，又称矢量.
(2) 向量的模：向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小，记为 $|\boldsymbol{a}|$.
(3) 向量的坐标表示：$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(x,y,z)$.
(4) 向量的运算：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$.
① 向量的加减法
坐标表示式：$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$.
② 向量的数乘
设 λ,μ 是数，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\begin{cases}\text{大小 } |\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}| \\ \text{方向}\begin{cases}\text{与 } \boldsymbol{a} \text{ 同向，当 } \lambda>0. \\ \text{与 } \boldsymbol{a} \text{ 反向，当 } \lambda<0.\end{cases}\end{cases}$
坐标表示式：$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$.
运算规律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$
</td></tr>
<tr><td>向量的数量积、
向量积、混合积</td><td>
(1) 向量的数量积
定义式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.
坐标表示式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.
性质：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，
$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$.
运算规律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.
(2) 向量的向量积
定义式：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\begin{cases}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \\ \text{方向：同时垂直于 } \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}, \\ \text{指向：按右手法则从 } \boldsymbol{a} \text{ 到 } \boldsymbol{b} \text{ 确定.}\end{cases}$
坐标表示式：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$.
性质：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行 $\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.
运算规律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$　(无交换律)；
$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$；$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.
几何意义：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.
(3) 向量的混合积
定义式：$[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.
坐标表示式：$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$.
性质：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.
$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$.
几何意义：$|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积
</td></tr>
</table>

续表

考　点	公　式
向量之间的关系	非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,则非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,可通过 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cdot\lvert\boldsymbol{b}\rvert}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ 计算得出. (1) 两向量平行(共线)$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 要证明不重合的三点 A,B,C 共线,只需证明 $\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\rvert=0$. (2) 两向量垂直 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$. (3) 三向量共面 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在 λ,μ,使 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ $\Leftrightarrow[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=0$. 要证明不重合的四个点 A,B,C,D 共面(或三线共面),只需证明 $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0$

2. **空间解析几何**

考　点	公　式
平面及其方程	(1) 平面方程 ① 点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$,其中 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为平面上给定的已知点,$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面的法向量. 若 $M(x,y,z)$ 表示平面上任一动点,则点法式可以写成向量形式:$\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}=0$. ② 一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$,其中 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面的法向量,$D=0$ 时平面过原点.若方程中某个坐标不出现,则平面就平行于该坐标轴.如平面 $Ax+Cz+D=0(B=0)$ 平行于 y 轴.若 $B=D=0$,则平面过 y 轴,方程为 $Ax+Cz=0$,此时只需知另外一点就可确定方程.在求解平面问题时,要注意利用方程系数的特殊性简化运算. ③ 截距式方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 其中 a,b,c 分别为平面在 x,y,z 轴上的截距.由于要求 a,b,c 非零,故平面并不总能表示成这种形式. (2) 两平面间的关系 给定 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,$\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. ① 两平面的夹角 两平面的夹角即两平面法向量 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 的夹角 θ(取锐角).当 $\theta=0$ 时,两平面平行(含重合);当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时,两平面垂直. $\cos\theta=\dfrac{\lvert\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2\rvert}{\lvert\boldsymbol{n}_1\rvert\cdot\lvert\boldsymbol{n}_2\rvert}=\dfrac{\lvert A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$. ② 两平面平行(或重合)$\pi_1\parallel\pi_2\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$. ③ 两平面垂直 $\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

考　点	公　式
直线及其方程	(1) 直线方程 ① 一般方程(交面式方程) $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$ 此方程的意义是将直线表示为两个平面的交线，直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$. ② 对称式方程(点向式方程) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，其中 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上给定的已知点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为直线的方向向量. 若用 $M(x,y,z)$ 表示直线上一动点，点向式方程可表示为向量形式 $\overrightarrow{PM}=\lambda\boldsymbol{s},\lambda\in\mathbf{R}$. ③ 参数式方程 $\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt,\\z=z_0+pt,\end{cases}t\in\mathbf{R}$，其中 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上的定点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为直线的方向向量. ④ 两点式方程 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$，其中 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是直线上两个定点，直线的方向向量为 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. (2) 两直线间的关系 设直线 $l_1:\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$，$l_2:\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$. ① 两直线的方向向量 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$ 之间的夹角(取锐角为两直线的夹角 θ)： $\cos\theta=\dfrac{\lvert\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2\rvert}{\lvert\boldsymbol{s}_1\rvert\cdot\lvert\boldsymbol{s}_2\rvert}(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2})$. ② 两直线平行(含重合) $l_1\parallel l_2\Leftrightarrow\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\parallel\boldsymbol{s}_2$. ③ 两直线垂直 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2$. ④ 两直线共面若 P_1,P_2 分别为直线 l_1,l_2 的两点，则 l_1,l_2 共面 $\Leftrightarrow\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=0$. ⑤ 两直线异面 l_1,l_2 异面 $\Leftrightarrow\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\neq0$
直线与平面的关系	给定平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$ 和直线 $l:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$. 当直线与平面不垂直时，直线 l 与其在平面 π 上的投影直线 l' 的夹角(取锐角)为直线与平面的夹角 θ. $\sin\theta=\dfrac{\lvert\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}\rvert}{\lvert\boldsymbol{s}\rvert\cdot\lvert\boldsymbol{n}\rvert}=\dfrac{\lvert Am+Bn+Cp\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2})$. ① 直线与平面垂直 $l\perp\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\parallel\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$. ② 直线与平面平行 $l\parallel\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$. ③ 直线在平面上 l 在 π 上 $\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$. ④ 直线与平面相交 l 与 π 相交 $\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}\neq0\Leftrightarrow Am+Bn+Cp\neq0$. 此时，直线 l 与平面 π 有唯一交点

续表

考点	公式
距离公式	(1) 点到直线的距离 设给定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 及直线 $l:\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$，则 P_0 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{\lvert\overrightarrow{P_0P_1}\times\boldsymbol{s}\rvert}{\lvert\boldsymbol{s}\rvert}$. 其中 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 为直线上某一定点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为直线的方向向量. (2) 点到平面的距离 设给定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 及平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$. 则 P_0 到 π 的距离为 $d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. (3) 两条直线间的距离 设直线 l_1 过 P_1 点，方向向量为$\boldsymbol{s}_1$，直线 l_2 过 P_2 点，方向向量为$\boldsymbol{s}_2$ 且$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\neq\boldsymbol{0}$，则 l_1 与 l_2 间的距离为 $d=\dfrac{\lvert\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\rvert}{\lvert\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\rvert}$
空间曲线方程	空间曲线可以看成是空间两个曲面的交线. 设两曲面方程为 $F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$，则空间曲线方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 或用参数写成 $x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$. 空间曲线 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程，是在上式中消去 z 得投影柱面方程 $f(x,y)=0$，再与 $z=0$ 联立，即 $\begin{cases}f(x,y)=0,\\z=0\end{cases}$
曲面方程	几种常用的二次曲面 ① 球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$，其中$(x_0,y_0,z_0)$是球心，$R>0$是半径. ② 椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$($a,b,c$ 均为正数). ③ 单叶双曲面(纸篓面)： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 或$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 或$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$($a,b,c$ 均为正数). ④ 双叶双曲面： $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 或$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 或$\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$($a,b,c$ 为正数). ⑤ 椭圆抛物面：$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$($a,b,c$ 为正数). ⑥ 双曲抛物面(马鞍面)： $z=\pm\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ 或$y=\pm\left(\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ 或$x=\pm\left(\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}\right)$($a,b,c$ 为正数). ⑦ 圆柱面：$x^2+y^2=R^2$ 或 $y^2+z^2=R^2$ 或 $x^2+z^2=R^2$. ⑧ 椭圆柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或$\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 或$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$($a,b,c$ 均为正数). ⑨ 双曲柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$ 或$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=\pm1$ 或$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=\pm1$($a,b,c$ 均为正数). ⑩ 抛物柱面： $x^2=2py$ 或 $y^2=2px$ 或 $x^2=2pz$ 或 $z^2=2px$ 或 $y^2=2pz$ 或 $z^2=2py$，其中 p 为非零实数

六、多元函数微分学

1. 偏导数与全微分

<table>
<tr><th>考 点</th><th>公式、定理</th></tr>
<tr><td>偏导数与全微分</td><td>(1) 偏导数
设二元函数 $z=f(x,y)$，则
$f_x(x,y)=\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$；
$f_y(x,y)=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$.
(2) 高阶偏导数
设 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 仍是二元函数，那么它们的偏导数就称为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，共有四种
$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}''(x,y)$；$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}''(x,y)$；
$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}''(x,y)$；$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}''(x,y)$.
类似地，可以讨论二元函数的三阶及 n 阶偏导数. 也可以讨论 n 元函数($n\geqslant 3$) 的高阶偏导数.
定理：如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内，这两个二阶混合偏导数必相等.
(3) 全微分
① 全微分公式：$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.
② 可微的充分条件：如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处两个偏导数连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微.
③ 可微的必要条件：如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处两个偏导数存在</td></tr>
<tr><td>复合函数微分法</td><td>设 $z=f(u,v)$，并设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，则 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 是 x,y 的复合函数. 如果 $z=f(u,v)$ 可微，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 对 x,y 的偏导数存在，则 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 对 x,y 的偏导数存在，且
$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$</td></tr>
<tr><td>隐函数微分法</td><td>(1) 公式法
$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 确定的具有连续偏导数的函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的偏导数公式 $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=-\dfrac{F_{x_i}}{F_y}(i=1,2,\cdots,n)$.
(2) 利用复合函数微分法：设方程 $F(x,y)=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$，将 $y=y(x)$ 代入方程后，方程变为恒等式 $F[x,y(x)]=0$，应用复合函数微分法，有 $F_x(x,y)\cdot 1+F_y(x,y)\cdot y_x=0$. 从中解出 y_x. 反复利用上述方法，可以求得隐函数的高阶偏导数</td></tr>
</table>

考　点	公式、定理
方向导数与梯度	(1) 方向导数公式 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x,y)$ 可微，l 方向的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta$，则函数在 M_0 处沿 l 方向的方向导数存在，且 $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta$. [函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x,y,z)$ 沿 l 方向的方向导数计算公式为 $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, 其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 l 方向的方向余弦] (2) 梯度公式 设数量场 $u=u(x,y,z)$ 具有连续的偏导数，则 $\mathbf{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$

2. **多元函数微分学的应用**

考　点	公式、定理
多元函数的极值问题	(1) 无条件极值问题 定理 1(极值的必要条件)：设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 有极值，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的两个偏导数存在，则 $F_x(x_0,y_0)=0,F_y(x_0,y_0)=0$. 定理 2(极值的充分条件)：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有二阶连续偏导数，又 $F_x(x_0,y_0)=0,F_y(x_0,y_0)=0$，令 $F_{xx}(x_0,y_0)=A,F_{xy}(x_0,y_0)=B,F_{yy}(x_0,y_0)=C$，则 ① 当 $AC-B^2>0$，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有极值，且 $A>0$ 时为极小值，$A<0$ 时为极大值； ② 当 $AC-B^2<0$，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处无极值； ③ 当 $AC-B^2=0$，不能判定 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 是否有极值. (2) 条件极值问题 可微函数 $z=f(x,y)$ 满足条件 $\varphi(x,y)=0$ 的条件极值的必要条件为 $\begin{cases}F_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0,\\F_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0,\\\varphi(x,y)=0.\end{cases}$ 上述方程组可以认为是函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 的无条件极值点的必要条件，其中 F 称为拉格朗日函数，λ 为拉格朗日乘数
空间曲线的切线、法平面 曲面的切平面、法线(Ⅰ)	(1) 空间曲线的切线和法平面 设空间曲线的参数方程为 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$，则在曲线上对应于 $t=t_0$ 的点处的切线方程为 $\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$. 切线的方向矢量为 $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$. 法平面方程为 $x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

<table>
<tr><th>考　点</th><th>公式、定理</th></tr>
<tr><td>空间曲线的切线、法平面曲面的切平面、法线(Ⅱ)</td><td>(2) 空间曲面的切平面和法线
若曲面由 $F(x,y,z)=0$ 给出,则在曲面上点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程为 $F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$. 法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$.
若曲面由 $z=f(x,y)$ 给出,则在曲面上点 (x_0,y_0) 处的切平面方程为
$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.
法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$</td></tr>
</table>

七、多元函数积分学

1. 重积分

<table>
<tr><th>考　点</th><th>公式、性质</th></tr>
<tr><td>二重积分(Ⅰ)</td><td>(1) 二重积分的性质
① 线性性质:
$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, k 是常数,
$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.
② 区域可加性:
设区域 D 由 D_1,D_2 组成,且 D_1,D_2 除边界点外无其他交点,则
$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.
③ 比较定理:
若在区域 D 内有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.
特别地,$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$.
④ 估值定理:
设 m,M 分别为 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最小值和最大值,则
$m|D|\leqslant\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M|D|$,其中 $|D|$ 表示区域 D 的面积.
⑤ 中值定理:
若 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续,则在 D 上至少存在一点 (ζ,η) 使得
$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\zeta,\eta)\cdot|D|$.
(2) 二重积分的对称性
利用二重积分中积分区域 D 的对称性和被积函数 $f(x,y)$ 的奇偶性可以简化二重积分的计算</td></tr>
</table>

考　点	公式、性质
二重积分(Ⅱ)	现归纳如下： ① 设 D 关于 y 轴对称： ⅰ. 若 f 为关于 x 的奇函数，则 $I=0$. ⅱ. 若 f 为关于 x 的偶函数，则 $I=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D_1=\{(x,y)\in D\mid x\geqslant 0\}$，即 D_1 为 D 中位于 y 轴右边的那一部分区域. ② 设 D 关于 x 轴对称： ⅰ. 若 f 为关于 y 的奇函数，则 $I=0$. ⅱ. 若 f 为关于 y 的偶函数，则 $I=2\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D_2=\{(x,y)\in D\mid y\geqslant 0\}$，即 D_2 为 D 中位于 x 轴上方那一部分的区域. ③ 设 D 关于原点对称： ⅰ. 若 f 对于 x,y 为奇函数，则 $I=0$. ⅱ. 若 $f(x,y)$ 对于 x,y 为偶函数，则 $I=2\iint\limits_{D_3}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D_3=\{(x,y)\in D\mid y\geqslant 0\}$，即 D_3 为 D 在上半平面的那一部分. ④ 设 D 关于直线 $y=x$ 对称： ⅰ. 若 $f(x,y)=-f(y,x)$ 则 $I=0$. ⅱ. 若 $f(x,y)=f(y,x)$ 则 $I=2\iint\limits_{D_4}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 其中 $D_4=\{(x,y)\in D\mid y\geqslant x\}$ 即 D_4 为 D 中位于直线 $y=x$ 以上的部分. (3) 二重积分的计算 ① 在直角坐标系中计算二重积分 若 D 为 X 型域，且 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$，则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$. 若 D 为 Y 型域，且 $D=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d,\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\}$，则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$. ② 极坐标系中计算二重积分 ⅰ. 极点在 D 外，且 $D=\{(r,\theta)\mid\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\varphi_1(\theta)\leqslant r\leqslant\varphi_2(\theta)\}$，则 $\iint\limits_{D}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$. ⅱ. 极点在 D 的边界上，且 $D=\{(r,\theta)\mid\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta)\}$，则 $\iint\limits_{D}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$. ⅲ. 极点在 D 内，且 $D=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta)\}$，则 $\iint\limits_{D}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

<table>
<tr><th>考 点</th><th>公式、性质</th></tr>
<tr><td>三重积分</td><td>
(1) 利用直角坐标计算三重积分
① 投影法：
ⅰ. 向 xOy 面作投影则 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.
ⅱ. 向 yOz 面作投影则 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)}f(x,y,z)\mathrm{d}x$.
ⅲ. 向 xOz 面作投影则 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{zx}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\int_{y_1(z,x)}^{y_2(z,x)}f(x,y,z)\mathrm{d}y$.
② 截面法
ⅰ. 垂直于 z 轴作截面，则 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_a^b\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
ⅱ. 垂直于 x 轴作截面，则 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_c^d\mathrm{d}x\iint\limits_{D_x}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
ⅲ. 垂直于 y 轴作截面，则 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_e^f\mathrm{d}y\iint\limits_{D_y}f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.
(2) 利用柱坐标计算三重积分
当积分区域 V 在坐标面上的投影区域为圆形、扇形、环形区域，而被积函数为 $f(x^2+y^2,z)$，$f(x^2+z^2,y)$ 或 $f(y^2+z^2,x)$，$f\left(\frac{y}{x}\right)$，$f\left(\frac{x}{z}\right)$ 等形式时，一般可采用柱坐标计算三重积分. 特别是当积分区域为圆柱、环柱、扇形柱、锥体等形状的区域时，一般用柱坐标计算最为简单.
令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z.\end{cases}$ 则 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.
$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}r\mathrm{d}r\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z$.
(3) 利用球面坐标计算三重积分
当积分区域为球面、球面与锥面、球面与球面等围成的区域，而被积函数含有 $x^2+y^2+z^2$ 的因子时，三重积分的计算宜采用球面坐标形式.
令 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi.\end{cases}$ 其中 $r\geqslant0,0\leqslant\theta\leqslant2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. 则 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$.
$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\mathrm{d}r$
</td></tr>
<tr><td>重积分的应用（Ⅰ）</td><td>
1. 求曲面的面积：设曲面 S 的方程为 $z=f(x,y)$，D_{xy} 为 S 在 xOy 面上的投影区域，$f(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有连续的偏导数，则曲面 S 的面积为
$S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
</td></tr>
</table>

考点	公式、性质
重积分的应用（Ⅱ）	设曲面的方程为 $x=g(y,z)$ 或 $y=h(x,z)$，类似地可得到： $S=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 或 $S=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$. 2. 重积分的物理应用 (1) 质量 ① 若平面薄片的面密度为 $\rho(x,y)$，所占区域为 D，则其质量为 $M=\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$. ② 设物体的体密度为 $\rho(x,y,z)$，所占空间区域为 Ω，则其质量为 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$. (2) 质心 ① 若平面薄片占有平面区域 D，面密度为 $u(x,y)$，则质心坐标为 $\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{1}{M}\iint\limits_{D}xu(x,y)\mathrm{d}\sigma;\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{1}{M}\iint\limits_{D}yu(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 其中 M 为平面薄片的质量，$M=\iint\limits_{D}u(x,y)\mathrm{d}\sigma;M_y=\iint\limits_{D}xu(x,y)\mathrm{d}\sigma;M_x=\iint\limits_{D}yu(x,y)\mathrm{d}\sigma$. ② 若物体占有空间区域 V，体密度为 $u(x,y,z)$，则物体的质心坐标为 $\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{V}xu(x,y,z)\mathrm{d}V,\bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{V}yu(x,y,z)\mathrm{d}V,\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{V}zu(x,y,z)\mathrm{d}V$. 其中 $M=\iiint\limits_{V}u(x,y,z)\mathrm{d}V$ 为物体的质量. (3) 转动惯量 ① 若物质薄片占有平面区域 D，面密度为 $u(x,y)$，则对 x 轴、y 轴及原点的转动惯量分别为 $I_x=\iint\limits_{D}y^2u(x,y)\mathrm{d}\sigma,I_y=\iint\limits_{D}x^2u(x,y)\mathrm{d}\sigma,I_o=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)u(x,y)\mathrm{d}\sigma$. ② 若物体占有空间区域 V，体密度为 $u(x,y,z)$，则物体对 x 轴、y 轴、z 轴及原点的转动惯量分别为 $I_x=\iiint\limits_{V}(y^2+z^2)u(x,y,z)\mathrm{d}V,I_y=\iiint\limits_{V}(x^2+z^2)u(x,y,z)\mathrm{d}V$, $I_z=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)u(x,y,z)\mathrm{d}V,I_o=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)u(x,y,z)\mathrm{d}V$. (4) 对空间质点的引力 若物体占有空间闭区域 Ω，体密度为 $\mu(x,y,z)$，质量为 m 的质点位于 (x_0,y_0,z_0)，设物体对质点的引力为 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$，则 $F_x=Gm\iiint\limits_{\Omega}\frac{(x-x_0)\mu}{r^3}\mathrm{d}V,F_y=Gm\iiint\limits_{\Omega}\frac{(y-y_0)\mu}{r^3}\mathrm{d}V,F_z=Gm\iiint\limits_{\Omega}\frac{(z-z_0)\mu}{r^3}\mathrm{d}V$, 其中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$，$G$ 为引力常数

2. **曲线积分与曲面积分**

考　点	公　式
曲线积分	(1) 对弧长的曲线积分(第一类曲线积分) ① 曲线 L 由参数方程 $x=x(t),y=y(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 表示,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$ ② 曲线 L 由方程 $y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 表示,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$ ③ 曲线 L 由方程 $x=x(y)(c\leqslant y\leqslant d)$ 表示,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+x'^2(y)}\,\mathrm{d}y.$ ④ 空间曲线 Γ 由参数方程 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 表示,则 $\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$ (2) 对坐标的曲线积分(第二类曲线积分) ① 曲线 L 由参数方程 $x=x(t),y=y(t)$ 表示,L 的起点 A 对应于 $t=\alpha$,终点 B 对应于 $t=\beta$,则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t.$ ② 曲线 L 由方程 $y=y(x)$ 表示,L 的起点 A 与终点 B 对应的横坐标分别为 a,b,则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}\mathrm{d}x.$ ③ 曲线 L 由方程 $x=x(y)(c\leqslant y\leqslant d)$ 表示,则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\{P[x(y),y]x'(y)+Q[x(y),y]\}\mathrm{d}y.$ ④ 空间曲线 Γ 由参数方程 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 表示,则有 $\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ $=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}\mathrm{d}t.$ (3) 两类曲线积分之间的关系 设 Γ 为空间有向曲线,Γ 上点 $M(x,y,z)$ 处切线的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,则 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$

考　点	公　式
格林公式	(1) 设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在区域 D 及其边界 L 上具有一阶连续偏导数，则 $\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$. 其中 L 取正向. (2) 四个等价命题 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在平面单连通区域 D 内具有一阶连续偏导数，则以下四个命题等价： 在 D 内曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，而只与路径起点、终点有关 $\Leftrightarrow$ 沿 D 内任一闭曲线 L，$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$ $\Leftrightarrow$ 微分式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 内是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分，即 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ $\Leftrightarrow$ 在 D 内恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$
曲线积分的应用	(1) 求质量 设空间曲线 Γ 上任一点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho=\rho(x,y,z)$，则此曲线的质量为 $M=\int_\Gamma\rho(x,y,z)\mathrm{d}s$. (2) 求质心坐标 设空间物质曲线 Γ 上质量分布是均匀的，则曲线 Γ 的质心坐标是 $\bar{x}=\frac{\int_\Gamma x\mathrm{d}s}{\int_\Gamma\mathrm{d}s}$； $\bar{y}=\frac{\int_\Gamma y\mathrm{d}s}{\int_\Gamma\mathrm{d}s}$； $\bar{z}=\frac{\int_\Gamma z\mathrm{d}s}{\int_\Gamma\mathrm{d}s}$. (3) 求功 在力场 $\boldsymbol{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 作用下，质点沿曲线 Γ 由 A 移动到 B，则力 $\boldsymbol{F}$ 所作功为 $W=\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$，其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$
曲面积分(Ⅰ)	(1) 对面积的曲面积分(第一类曲面积分) ① 设曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y)$，Σ 在 xOy 面上投影区域为 D_{xy}，则 $\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. ② 设曲面 Σ 的方程为 $y=y(x,z)$，Σ 在 xOz 面上投影区域为 D_{zx}，则 $\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{zx}}f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$. ③ 设曲面 Σ 的方程为 $x=x(y,z)$，Σ 在 yOz 面上投影区域为 D_{yz}，则 $\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{yz}}f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

续表

考　点	公　式
曲面积分（Ⅱ）	(2) 对坐标的曲面积分(第二类曲面积分) ① 设有向曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y)$，Σ 在 xOy 面上投影区域为 D_{xy}，则 $\iint\limits_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 上式中若 Σ 的正向与 z 轴正向夹角小于 $\frac{\pi}{2}$ 取“+”号，大于 $\frac{\pi}{2}$ 时取“—”号. ② 类似地有下面两式： $\iint\limits_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint\limits_{D_{zx}} Q[x,y(x,z),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，$\iint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ (3) 两类曲面积分之间的关系 设 Σ 为有向曲面，Σ 上点 $M(x,y,z)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}^0$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则有 $\iint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$
高斯公式	设函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在空间闭区域 Ω 上具有一阶连续偏导数，则 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是 Ω 的边界曲面外侧
斯托克斯公式	设函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在包含曲面 Σ 的空间域 Ω 内具有一阶连续偏导数，记 Γ 为曲面 Σ 的边界曲线，则 $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$， 其中曲线 Γ 的正向与曲面 Σ 的法向量方向遵循右手法则
通量与散度、旋度	(1) 通量与散度 ① $\oiint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 或 $\oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$ 或 $\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$， 其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是有向曲面 Σ 的法向量的方向余弦，$\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k}$ 称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 通过曲面 Σ 的指定侧的通量(或流量). ② 向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$ (2) 旋度 设向量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，函数 P,Q,R 均具有一阶连续偏导数，则向量场 $\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$ 称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，记作 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$， 即 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}$

八、无穷级数

1. 常数项级数

考点	公式
收敛级数的概念及性质	(1) 级数收敛定义 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$存在，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛且其极限叫作级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的和，并记为$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，否则称级数发散. (2) 收敛级数的基本性质 ① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$，$c$是与$n$无关的常数，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ca_n$也收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=cS$. ② 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S_1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=S_2$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$也收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=S_1\pm S_2$. ③ 在级数前加上有限项或去掉有限项或改变有限项，不改变级数的敛散性. ④ 对收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$的项任意加括号，所成的新级数仍收敛，且和为$S$；但对发散级数不可随便加括号. ⑤ 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 这个命题的逆否命题，即"若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散"常用于判别级数发散. (3) 级数收敛的条件 ① 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. ② 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件：对任意给定的正数$\varepsilon$，总存在自然数$N$，使得当$n>N$时，对于任意的自然数$p$，都有$\lvert u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\rvert<\varepsilon$成立
常数项级数的审敛法（Ⅰ）	(1) 正项级数敛散性的判别法 ① 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件是它的部分和序列有上界. ② 比较判别法：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$均为正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l$，则有若$0<l<+\infty$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$同时敛散；若$l=0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；若$l=+\infty$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散. 而在实际运用时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$往往可取等比级数或$p-$级数，有时也直接研究$a_n$趋于零的阶

考　点	公　式
常数项级数的审敛法（Ⅱ）	③ 达朗贝尔判别法：设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数，若$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. ④ 柯西判别法：设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$，若$\rho<1$，级数收敛；若$\rho>1$，则级数发散. ⑤ 极限审敛法：ⅰ. $\lim_{n\to\infty}nu_n=l>0$（或$\lim_{n\to\infty}nu_n=+\infty$）则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；ⅱ. 如果 $p>1$，而$\lim_{n\to\infty}n^pu_n=l(0\leqslant l<+\infty)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. (2) 交错级数的审敛法 若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足：① $u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，② $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，则级数收敛，且其和 $S\leqslant u_1$，其余项 r_n 的绝对值 $\mid r_n\mid\leqslant u_{n+1}$. 这个定理也称为莱布尼茨定理
常用重要级数	(1) 调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$，该级数发散. (2) 几何级数（等比级数）：$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$， ① 当 $\mid q\mid<1$ 时，级数收敛；② 当 $\mid q\mid\geqslant1$ 时，级数发散. (3) p－级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots(p>0)$， ① 当 $p>1$ 时，级数收敛；② 当 $p\leqslant1$ 时，级数发散

2. 幂级数

考　点	公式、性质
幂级数及其性质（Ⅰ）	(1) 收敛半径的求法 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，其系数满足条件$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\|=l$，或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mid a_n\mid}=l$，则当 $l\neq0$ 时，$R=\frac{1}{l}$；当 $l=0$ 时，$R=+\infty$；当 $l=+\infty$ 时，$R=0$. (2) 幂级数的性质 ① 绝对收敛性：设幂级数在 $x=x_1\neq0$ 处收敛，则它在 $\mid x\mid<\mid x_1\mid$ 处绝对收敛；若幂级数在 $x=x_2$ 处发散，则它在 $\mid x\mid>\mid x_2\mid$ 处也发散. 这个结论也称为阿贝尔定理. ② 和函数的连续性：若幂级数的收敛半径 $R>0$，则和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内连续. ③ 逐项求积分：若幂级数的收敛半径$R>0$，则和函数 $S(x)$ 在收敛区间$(-R,R)$ 内可积，且可逐项积分，即$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\mathrm{d}t\;[x\in(-R,R)]$

续表

考　点	公式、性质
幂级数及其性质(Ⅱ)	④ 逐项求导数:若幂级数的收敛半径 $R>0$,则和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可导,且可逐项可导,即 $S'(x)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$. ⑤ 收敛半径不变性: ⅰ. 若幂级数的收敛半径 $R>0$,则对此级数逐项积分或逐项求导后所得到的新幂级数有相同的收敛半径. ⅱ. 若幂级数的收敛半径 $R>0$,则和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内有任意阶导数,可由逐项求导求得,即 $S^{(k)}(x)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^{(k)}=\sum\limits_{n=k}^{\infty}n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$,且收敛半径仍为 R
函数展开成幂级数	(1) 泰勒级数 若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有任意阶导数,则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数,可记作 $f(x)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. 麦克劳林级数:泰勒级数中若 $x_0=0$,则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数. (2) 常用初等函数的幂级数展开 $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\quad \lvert x\rvert<1$ $\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots\quad \lvert x\rvert<1$ $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots\quad x\in(-1,1]$ $\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-x-\frac{1}{2}x^2-\cdots-\frac{1}{n}x^n-\cdots\quad x\in[-1,1)$ $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots\quad x\in(-\infty,+\infty)$ $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\quad x\in(-\infty,+\infty)$ $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots\quad x\in(-\infty,+\infty)$ $(1+x)^{\alpha}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{\alpha}^{n}x^n\quad x\in(-1,1),\alpha\in\mathbf{R}$

MSG191